

# ABC-гипотеза на основе квантовой механики и творческого воображения

Марат Авдыев<sup>1,2</sup>, Marat Avdyev<sup>3</sup> SCM, Union<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Сибирский Центр медиации, Союз

<sup>2</sup>Физик, практикующий медиатор, Сибирский Центр медиации, Союз

<sup>3</sup>ХМАО-Югра, г. Сургут

## Аннотация

ABC-гипотеза утверждает, что для трёх взаимно-простых чисел  $A$ ,  $B$  и  $C$ , удовлетворяющих соотношению  $A + B = C$ , произведение простых делителей  $A$ ,  $B$  и  $C$  обычно ненамного меньше  $C$ . Теорема формулируется очень просто, но чрезвычайно сложно доказываться. Около пяти сотен страниц было потрачено выдающимися математиками Западного мира на поиск доказательства - но результат далеко неоднозначен и трудно верифицируем. Между тем, каждый школьник с усиленной подготовкой в сфере точных наук может понять и доказать ABC-гипотезу, опираясь на творческое воображение, на основе синтеза школьных знаний, включая физику и химию. ABC-гипотеза имеет ряд замечательных следствий в теории чисел, как например, доказательство Великой теоремы Ферма. Простые числа несут в себе огромный исследовательский потенциал, они играют связующую роль между окружающим нас миром и микромиром. Поэтому простые числа - основа естественных наук. В данной работе ABC-гипотеза доказана преимущественно на основе школьной программы с усиленной физико-математической подготовкой. Это позволяет легко проверить доказательство и имеет важное значение для педагогики.

## Содержание

## 7 Дискуссии

19

1	Введение	1
2	Инженерный подход. Конструкция	2
3	Физический смысл ABC-гипотезы	2
3.1	Основная теорема арифметики . . .	2
3.2	Микросостояние и макросостояние системы . . . . .	3
3.3	Фазовое пространство. Плотность распределения вероятности . . . . .	3
3.4	Квантовая природа простых чисел .	4
3.5	Сохранение фазового объема. Энтропия	4
3.6	Каноническое распределение Гиббса	5
3.7	Вырождение энергетических уровней	6
3.8	Именно радикалы чисел $A$ , $B$ , $C!$ . .	8
4	С позиции чистой математики	9
4.1	Статистическая матрица для произвольных $A$ , $B$ , $C$ . . . . .	12
4.2	Аналогии из систем ЛДУ . . . . .	13
4.3	Флуктуации . . . . .	14
5	Простые числа. Системы. Логарифмы.	17
5.1	Заключение . . . . .	17
6	Литература и др. источники	18

## 1 Введение

ABC-гипотеза в теории чисел была сформулирована независимо математиками Дэвидом Массером в 1985 году [1] и Джозефом Эстерле [2] в 1988 году. (Далее по тексту: ABC-гипотеза). Формулировка Гипотезы заключается в следующем. Для любых положительных целых взаимно-простых чисел  $A, B, C$ , удовлетворяющих уравнению  $A + B = C$ , произведение радикалов чисел  $ABC$  обычно ненамного меньше, чем  $C$ . Это можно выразить более точно с помощью формул  $\max(A, B, C) < K_\epsilon \text{Rad}(ABC)^{1+\epsilon}$ , где  $K_\epsilon$  зависит только от некоторого положительного действительного числа  $\epsilon$ . Функция  $\text{Rad}$  - это радикал чисел  $A$ ,  $B$  и  $C$ , равный произведению простых чисел, образующих эти числа, но возведенных в первую степень, например,  $\text{Rad}(8) = \text{Rad}(2^3) = 2$ ,  $\text{Rad}(1000000) = \text{Rad}(2^6 * 5^6) = 30$ .

Эквивалентная формулировка ABC гипотезы включает в себя показатель качества тройки

$$q_{ABC} = \frac{\log(C)}{\log \text{Rad}(ABC)} = \frac{\ln(C)}{\ln \text{Rad}(ABC)} \quad (1.1)$$

которое определяется следующим образом: для  $\forall$  положительного действительного числа  $\epsilon \exists$  только конечное число троек  $A, B, C$  из взаимно простых натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению  $A + B = C$ , таких, что  $q_{ABC} > 1 + \epsilon$ .

Выдающиеся математики западного мира потратили много сотен страниц на поиск доказа-

\*Эл. почта: marat@emediator.ru

Получено: Фев 20, 2024, DOI 10.21661/г-562378 Интерактив-Плюс. Опубликовано в нов. редакции: Июнь 26, 2024

тельств, и процесс поиска доказательств продолжается. Но есть и другой подход. Миньён Ким [Minhyong Kim], математик из Оксфордского университета, полагает: "Должна быть возможность использования идей физики для решения задач теории чисел, но мы ещё недостаточно точно понимаем, как это осуществить"[3]. Ниже в тексте курсивом/подчеркиванием отмечены научные термины, значение которых подробно раскрыто в списке прилагаемой литературы и на специализированных сайтах, форумах, посвященных точным наукам.

## 2 Инженерный подход. Конструкция

Будем отталкиваться от авторского доказательства ВТФ [4], где использован инженерный подход и конструкция в виде трёх вложенных друг в друга концентрических шаров (n-кубов) центры которых помещены в начало координат. Ключевыми моментами этого доказательства являются: центральная симметрия, концепция слоёв, объединяющих множество элементов, попарно не пересекающиеся классы эквивалентности, возможность гомеоморфизма фигур только одинаковых размерностей и дискретность пространства  $\mathbb{Z}$ , где применимы постулаты Евклида (роль точек могут принять на себя гиперкубики - элементы  $1^n$ ), а также аксиомы топологии. Шар гомеоморфен кубу, а сфера — слою кубоида, определяемому как разность множеств в виде концентрических кубоидов с ребрами отличающимися на две единицы по каждой оси координат (т.е. единичной толщины с учетом движения взгляда исследователя вдоль и против оси).

Из условий симметрии исследуемой конструкции в уравнении, соответствующей АВС-гипотезе найдется хотя бы одно слагаемое степени не выше двух. В противном случае существовали бы три многообразия соответствующих формуле  $ka^n$  с основанием в виде гиперкуба  $a^n$  степени  $n \geq 3$  и нашлись бы такие коэффициенты в виде рациональных чисел  $k_1, k_2, k_3$  с условием  $k_1x^n + k_2y^n = k_3z^n$  и слои - сферы, принадлежащие соответственно кубоидам А, В и С размерностью n-1 для которых:

$$k_1 Sphere_A + k_2 Sphere_B = k_3 Sphere_C \quad (2.1)$$

Здесь поэлементно сравниваются меры (более привычно для школьника: объемы, площади, длины для случая  $n = 3, 2, 1$  соответственно) и подразумевается система уравнений отдельно по каждой размерности от 1 до n-1 поскольку размерность сферы (слоя) на единицу меньше охватываемого ею шара (куба). Заметим, что во избежании в дальнейшем смешения обозначения с энтропией обозначим слои Sphere. Для случая  $n \geq 3$  одновременное

сопоставление двух и более попарно не пересекающихся классов эквивалентности (размерности элементов от 1 до n-1, как например гиперплоскости  $a_1 \cdot 1^{n-1}, a_2 \cdot 1^{n-2}, a_3 1^{n-3} \dots$  и аналогично гипермеридианы на сфере) приводит к системе уравнений, неразрешимой в силу неравенства треугольника и исключения тривиального случая нулевого катета. (Сумма катетов больше чем длина гипотенузы). От краткого изложения идеи доказательства ВТФ, вернемся к АВС-Гипотезе.

## 3 Физический смысл АВС-гипотезы

### 3.1 Основная теорема арифметики

Согласно основной теореме арифметики каждое из тройки чисел в выражении  $A + B = C$  может быть разложено на простые множители, допускаются степени выше единицы, но по условиям АВС-гипотезы, повторяющиеся множители в этом разложении исключаются в силу отсутствия общих делителей

$$A + B = C \iff a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k} * 1^{n-t} + b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \dots b_l^{\beta_l} * 1^{n-u} = c_1^{\gamma_1} c_2^{\gamma_2} \dots c_m^{\gamma_m} * 1^{n-v} \quad (3.1)$$

Для соблюдения правил размерности элементов в пространстве целых чисел, определяемом как n-кратное Декартово произведение оси целых чисел  $Z^n = Z * Z * \dots * Z$ , каждое слагаемое в формуле выше умножается также на множитель в виде  $1^{n-t}$  элементарного единичного куба с той целью, чтобы каждое слагаемое имело размерность, равную размерности евклидова пространства n, в которое вложены исследуемые многообразия разных размерностей. (От аналогии с конструктором Lego можно попробовать перейти к аксиомам топологии и постулатам Евклида.) Другими словами, суммы показателей степеней всех множителей в формуле выше равны соответственно t, u, v, что как раз соответствует размерности многообразий А, В, С:

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = t, \beta_1 + \dots + \beta_l = u, \gamma_1 + \dots + \gamma_m = v \quad (3.2)$$

Легко понять размерность каждого члена и минимально необходимую размерность  $n = \max(t, u, v)$  е (3.1) вклидова пространства, в которое могут быть вложены исследуемые кубоиды согласно приведенной формуле. Ниже будет использоваться общее число простых множителей названной формулы, оно равно  $L = k + l + m$ .

Развивая принятый в работе автора инженерный подход, сопоставим выражение (3.1) с множеством

в виде трёх многообразий, каждый в форме многомерного параллелепипеда или кратко — кубоида в конечномерном евклидовом пространстве, с заданной метрикой и мерой, именуемом далее просто евклидовым пространством.

В этом представлении приведенная выше формула (3.1) также может быть записана как условие гомеоморфизма фигур  $A \cup B \equiv C$ , а исследуемый объект представляет собой множество трёх кубоидов с разными рёбрами, длины которых являются простыми числами как раз из формулы 3.1

Благодаря центральной симметрии, легко определить центр масс каждого кубоида, предполагая, что он заполнен однородным материалом. Совместим эти центры с началом координат и сориентируем (гипер)границы кубоидов перпендикулярно осям. В дальнейшем мы будем считать исследуемую конструкцию концентрическими кубоидами. В каждом из кубоидов легко увидеть гиперплоскость зеркальной симметрии размерности на единицу меньшей, чем исследуемый кубоид, ортогональные осям координат и проходящие через начало координат. Их число для каждого кубоида равно числу осей симметрии  $\Rightarrow$  равно показателю степени множителей, образующих кубоид.

$\exists$  непрерывная обратимая функция эквивалентности  $f$ , отображающая каждый элемент в виде элементарного куба  $1^n$  из множеств  $A$  и  $B$  в  $C$   $f(A, B) \rightarrow C$ , что также можно выразить с позиции топологии соответствует понятию гомеоморфизма следующих фигур:

$$A \equiv C \setminus B \quad (3.3)$$

при этом  $\exists$  обратная функция  $f^{-1}(C, B) \rightarrow A$ . Исключая очевидный случай первых степеней АВС-гипотезы, не меняя общности, в дальнейшем полагаем, что размерность  $\dim(A) \leq 2$ , а в свою очередь  $\dim(B)$ ,  $\dim(C)$  - кубоиды размерности два и более. Помним, что размерность кубоида определяется суммой степеней простых сомножителей в 3.2 Для  $\exists f$  необходимо обеспечить возможность взаимного сокращения слоёв более высоких размерностей, чем два, а также сокращение числа гиперплоскостей симметрии до двух (Отметим, что операция сокращения, перестановок, перемещения  $1^n \rightarrow 1^n$  возможны именно в отношениях эквивалентности. Однородность евклидова пространства постулируется).

Какому физическому явлению может соответствовать формула (3.1)? Она моделирует некую систему, состоящую из подсистем, между которыми отсутствуют связи, но определенным образом поделён общий ресурс. С позиции школьных знаний для поиска доказательства АВС-гипотезы особый интерес представляют законы термодинамики.

Общим ресурсом могут быть энергия, фазовое пространство, энтропия, число частиц и др.

### 3.2 Микросостояние и макросостояние системы

Рассмотрим систему, состоящую из смеси идеальных газов, молекулы которых не взаимодействуют между собой. Следствием этого в частности, является закон Дальтона, согласно которому давление смеси химически не реагирующих между собой газов равно сумме парциальных давлений каждого из газов — и это становится понятно в силу отсутствия межмолекулярного взаимодействия.

Автор предлагает рассматривать АВС-гипотезу с позиции фазового пространства термодинамической системы насчитывающую  $2s$  измерений, по координатным осям которого откладываются значения  $s$  обобщенных координат  $q$  и  $s$  импульсов  $p$  данной системы ( $s$  - число степеней свободы) в уравнении Гамильтона, известных школьнику из курсов механики под наименованием теорема о кинетической энергии. Операторная форма уравнения Гамильтона в канонической форме достаточно красива, универсальна, описана в литературе, но требует небольшого опыта работы с частными производными [5,6]. Ещё более точно применение статистического подхода в физике предполагает знание основ квантовой механики [6 - 8], понимание принципа неопределенности Гейзенберга  $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$ , представление об уравнении Шредингера, о матрице плотности вероятности, об операторе гамильтониан, знание замечательных свойств эрмитовых операторов, правил работы с коммутаторами и скобками Пуассона, основных формул термодинамики, но ниже изложение будет опираться преимущественно на знание материалов школьной программы.

Попробуем угадать, какому классу физических явлений соответствует АВС-гипотеза? Начнем с понятия микросостояние - это конкретная конфигурация системы, которая описывает точные положения и импульсы всех отдельных частиц, составляющих систему. Каждое микросостояние имеет определенную вероятность возникновения в процессе движения молекул. Макросостояние системы относится к ее макроскопическим свойствам, например таким свойствами являются температура, давление, объем и плотность.

### 3.3 Фазовое пространство. Плотность распределения вероятности

Каждая точка фазового пространства отвечает определенному микросостоянию системы. В ходе эволюции системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве некоторую

фазовую траекторию. Произведение дифференциалов:

$$dqdp = dq_1dq_2\dots dq_sdp_1dp_2\dots dp_s \quad (3.4)$$

рассматривается как «элемент объема» фазового пространства  $\Delta\Gamma$ . Применительно к исследуемой формуле, учитывая форму кубоида и равенстве приращения линейной функции её дифференциалу, далее будет употребляться наряду с обозначением дифференциала знак  $\Delta$ .

Выразим вероятность и плотность вероятности  $\rho$  обнаружить объект в заданных координатах фазового пространства через очевидную формулу:

$$dw = \rho(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s) dpdq \quad (3.5)$$

- вероятность отыскать исследуемый объект в заданных бесконечно малых интервалах координат и импульсов в пределах:  $q_i \dots q_i + dq_i, p_i \dots p_i + dp_i$ . При этом объем фазового пространства выражается через энергию по формуле:

$$\Delta\Gamma = \frac{d\Gamma(\bar{E})}{dE} \Delta E \quad (3.6)$$

Выше через  $\Delta\Gamma(E)$  обозначается число квантовых состояний с энергиями, меньшими или равными  $E$ . Далее приведена плотность вероятности  $\rho$  и записано условие нормировки:

$$\sum_{\Omega} \rho(\bar{E}) \Delta q \Delta p = 1 \quad (3.7)$$

интеграл по всем вероятностям состояний подсистемы образует полную группу событий  $\Rightarrow$  для функции плотности вероятности  $W(E)$ :

$$\int W(E) dE = 1 \dots \sum W \Delta\Gamma = 1 \quad (3.8)$$

Формулы, приведенные выше, помогает найти интересующее число состояний с энергией между  $E \dots E + dE$ . Предполагается выбор такой инерциальной системы отсчета, где суммарный импульс и момент импульса всей исследуемой подсистемы равны нулю. Знак тире над энергией  $\bar{E}$  обозначает среднее значение энергии подсистемы по всем квантовым состояниям. Здесь и ниже обозначение  $\Delta q$  и  $\Delta p$  представляют собой произведения вида (3.4) по всем степеням свободы.

### 3.4 Квантовая природа простых чисел

В силу самой природы квантовой механики и основанной на ней статистической физике, речь может идти лишь о нахождении распределения плотности вероятности для координат или импульсов в отдельности, а не тех и других вместе, поскольку координаты и импульсы частицы в общем случае

не могут одновременно иметь определенных значений в силу принципа неопределенности Гейзенберга. Искомые распределения вероятностей должны учитывать как статистическую неопределенность, так и неопределенность, присущую непосредственно квантовомеханическому описанию  $\Rightarrow$  ответ на вопрос о принадлежности точки произвольному многообразию в исследуемой конструкции из кубоидов  $1^n \in A$  или  $1^n \notin A$ , в фазовом пространстве следует искать с позиции статистической физики / теории вероятностей.

### 3.5 Сохранение фазового объема.

#### Энтропия

По теореме Лиувилля объем фазового пространства обладает свойством инвариантности по отношению к каноническим преобразованиям, сохраняющим гамильтониан и интегралы движения, в частности энергии, импульса, момента импульса. [6 стр. 192-193].

Для квазиклассического случая, где законы квантовой механики можно заменить уравнениями Гамильтона, которые являются переформулировкой хорошо известных из школы уравнений Ньютона. При этом объем фазового пространства

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi)^s} \quad (3.9)$$

Величину  $\Delta\Gamma$  называют статистическим весом микроскопического состояния подсистемы, а ее логарифм — энтропией. В свою очередь, энтропия определяется через среднее значение, обозначаемого скобками  $\langle \rangle$ , логарифма  $\Delta\Gamma$  как для случая описания исследуемой системы с позиции её квантового состояния от функции распределения плотности вероятности по энергии  $E_i$ , так и в квазиклассическом подходе от плотности вероятности, по формулам:

$$S = - \langle \lg w(E_i) \rangle = - \sum_i w_i \ln(w_i) \quad (3.10)$$

$$S = - \langle \ln [(2\pi\hbar)^s \rho] \rangle = - \int \rho \cdot \ln [(2\pi\hbar)^s \rho] dpdq \quad (3.11)$$

Определенная таким образом энтропия, как и сам статистический вес есть безразмерная величина. (В школьной физике и в некоторых учебниках теоретической физики в последней формуле перед знаком логарифма ставят постоянную Больцмана  $k_B = 1.38 * 10^{23}$  Дж/К, что позволяет измерять абсолютную температуру в Кельвинах, а не энергетических единицах, но применительно к Гипотезе, постоянную Больцмана удобнее будет в некоторых случаях опускать, что легко догадаться из контекста).

Для простоты рассмотрим замкнутую систему в целом (т.е. изолированную от иных систем, например, помещенную в термостат), где определены  $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3 \dots$  — статистические веса ее различных подсистем. Если каждая из подсистем может находиться в одном из  $\Delta\Gamma_\alpha$  состояний, то фазовые объемы подсистем перемножаются, а энтропии подсистем складываются что иллюстрируют выражения:

$$\Delta\Gamma = \prod_{\alpha} \Delta\Gamma_{\alpha}; \dots S = \sum_{\alpha} S_{\alpha} \quad (3.12)$$

Другими словами, формула описывающая фазовое пространство допускает разделение переменных. На практике часто приходится иметь дело со случаями, когда квазиклассическим является не всё микроскопическое движение частиц, а лишь движение, соответствующее части степеней свободы, в то время как по остальным степеням свободы движение является квантовым (так, например, может быть квазиклассическим поступательное движение молекул при квантовом характере внутримолекулярного движения атомов). Формула 3.1 может быть представлена в виде:

$$e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2} \dots e^{\alpha_k x_k} + e^{\beta_1 y_1} e^{\beta_2 y_2} \dots e^{\beta_k y_k} \\ = e^{\gamma_1 z_1} e^{\gamma_2 z_2} \dots e^{\gamma_k z_k} \quad (3.13)$$

где показатели степени  $x, y, z$ , подобраны так, чтобы выделить только одно простое число из перечисленных в формуле (3.1), что легко достигается путем взятия натурального логарифма. Забегая вперед, отметим, что в классической механике переменная  $w_k$ , от которой зависит энтропия не может быть выбрана однозначно, поскольку в классической физике энтропия определяется с точностью до произвольного слагаемого.

Выбор обобщенного импульса  $\Delta p_i$  либо обобщенной координаты  $\Delta q_i$  на роль сомножителя, учитываемого в формуле (3.5) произволен. Для простоты ограничим объем исследуемой смеси газов  $q$  единицей и будем считать все  $\Delta q_i = 1$ , что означает выбор исследуемого малого элемента объема в системе, численно равного единице (нанометры, ангстремы либо атомная единица длины  $a_0$ , применяемая в атомной и квантовой физике, т.н. боровский радиус — ближайшей к ядру орбиты невозбужденного электрона атома водорода H в модели атома 5,29 · 10<sup>-11</sup> м).

АВС-Гипотезу можно рассматривать как математическую интерпретацию сложной системы, состоящей из простых подсистем, где выполняется принцип аддитивности энтропии и перемножения объемов фазовых пространств подсистем. Формула (3.12) пригодна для выражения закона сохранения

энтропии подсистемы при разделении переменных и адиабатических процессах, достаточно медленных по сравнению с временем релаксации / установления локального равновесия. На практике это время в лабораторных условиях протекает быстро и сопоставимо со временем распространения звуковой волны в сосуде с газом (330 метров в секунду при нормальном атмосферном давлении и температуре 20 градусов Цельсия для воздуха - сотни метров в секунду в зависимости от параметров газа либо смеси).

Говоря об экспоненте в формуле (3.13), отметим, что известные формулы распределения плотности вероятности нахождения частиц выражены через экспоненту: как например в изучаемых в физико-математических школах распределении Больцмана  $n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$ , т. н. барометрической формуле - и распределении Максвелла:

$$dw = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \quad (3.14)$$

Обе формулы дают представление о статистическом ансамбле, который следует рассмотреть детальнее.

### 3.6 Каноническое распределение Гиббса

Механические состояния, совместимые с данным термодинамическим состоянием, составляют статистический ансамбль. Статистический ансамбль представлен в фазовом пространстве набором точек, распределение которых описывается плотностью вероятности. Оно даёт ответ о вероятности нахождения такого состояния всей системы, при котором данное тело находится в некотором определенном квантовом состоянии  $w_n$  с энергией  $E_n$ , в состоянии, описанном микроскопическим образом. Микроскопическое состояние внешней среды при этом не отслеживается. Каноническое распределение Гиббса основано на простом принципе: вероятность нахождения сложной системы 1-2 равна произведению вероятностей её подсистем 1 и 2:  $\rho_{12} = \rho_1 * \rho_2$  (из чего следует удобство применения логарифмов для исследования сложной системы). Опираясь на этот постулат равновероятности всех доступных исследуемой системе микросостояний, вытекающий из симметрии, Гиббс вывел формулу:

$$w_n = \exp\left(\frac{F - E_n}{T}\right), \dots \\ \rho = (2\pi h)^s \exp\frac{F - E(p, q)}{T} \quad (3.15)$$

До многоточия выше приведена функция распределения вероятности по энергии системы в состоянии  $E_n$  в квантово-механическом представлении, после — в квазиклассическом представлении. Здесь

- $w_n(p, q)$  — вероятность нахождения в состоянии, соответствующему волновой функции с собственным значением
- $E_n$  - энергия как функция от обобщенных координат,
- $s$  — число степеней свободы.
- $F$  - свободная энергия газа. (В термодинамике за счет разницы свободных энергий конечного и начального состояний газа совершается работа, что объясняет удобство использования этой переменной).
- $\rho$  — плотность вероятности нахождения в конкретной фазовом дифференциале,

Любопытно отметить, что свободная энергия газа является простым следствием условия нормировки приведенного выше канонического распределения Гиббса. Это наглядный пример связи между математикой, теоретической физикой и лабораторным экспериментом. В термодинамике свободная энергия  $F$ , энтропия  $S$ , энергия  $E$ , объем  $V$ , давления  $P$ , температура  $T$  ряд других переменных выводятся друг из друга и контролируются. Первые три перечисленные переменные являются аддитивными функциями.

Возможно, что квазиклассическим является не все микроскопическое движение частиц, а лишь движение, соответствующее части степеней свободы, в то время как по остальным степеням свободы движение является квантовым. Например, может быть квазиклассическим поступательное движение молекул при квантовом характере внутримолекулярного движения атомов. В таком случае уровни энергии тела можно написать в виде функций от квазиклассических координат и импульсов  $E(p, q)$ .

Упомянутые выше распределения Больцмана и Максвелла являются частными случаями канонического распределения Гиббса. В первом случае в числителе дроби экспоненты подставляется с отрицательным знаком потенциальная энергия, во втором — кинетическая. В знаменателе в обоих случаях остаётся  $T$  либо  $kT$ .

В силу идентичности молекул газа при анализе распределения Максвелла достаточно рассмотреть фазовое пространство лишь одной молекулы, выразить энергию в импульсном представлении в координатах

$E = \frac{1}{2}m(px^2 + py^2 + pz^2) + \epsilon_k$ , при этом  $\epsilon_k$  - это энергия газа, поделенная на число молекул газа,  $k$ -ый уровень энергии одной молекулы, приходящаяся на её вращательные, колебательные степени свободы, собственный момент импульса элементарных

частиц, спин и др. Далее интегрирование по обобщенным координатам  $dq$  системы можно заменить на простое умножение на объем сосуда — аналогичный алгоритм применяется для распределения Максвелла (3.14). Это значительно упрощает вычисления. В результате для нахождения свободной энергии  $F$  идеального газа (напомним, что разница свободной энергии конечного и начального состояния как раз равна совершенной работе за счет газа) используется следующая формула [9 форм. 31.3, 31.2]:

$$F = -NT \ln \left[ \frac{eV}{N} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} Z \right] = -NT \ln \frac{eV}{N} + Nf(T) \quad (3.16)$$

Где

- $N$  — число молекул
- $T$  — абсолютная температура в энергетических единицах
- $e$  — число Эйлера 2.718 . . .
- $V$  — объем сосуда,  $m$  — масса молекулы
- $\hbar$  - приведенная постоянная Планка, равная  $1.055 * 10^{-34}$  Дж \*сек.
- $Z$  — статистическая сумма, зависящая от энергетических уровней молекулы, её определение будет приведено ниже.

Начальные температура, объем и кол-во частиц рассматриваются как заданные извне параметры исследуемой системы. Альтернативное представление приведенной выше формулы заключается в выносе всех параметров в отдельную функцию, зависящую лишь от температуры  $f(T)$ .

Энтропия  $S$  определяется из термодинамических соотношений как частная производная со знаком минус от свободной энергии:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = N \ln \frac{eV}{N} - N \frac{df}{dT}(T) \quad (3.17)$$

Исходя из основных уравнений термодинамики, можно найти и другие термодинамические переменные исследуемой подсистемы, чем полностью определить либо задать её макроскопическое состояние.

### 3.7 Вырождение энергетических уровней

Когда разные волновые функции имеют одно и то же собственное значение энергии  $E_n$ , то это означает вырождение энергетического уровня. Показатель степени в формуле 3.1 соответствует кратности вырождения энергетического уровня, обозначаемый как статистический вес  $g_k$ . В этом случае часть

формулы (3.15) содержит статистическую сумму, определяемую по формуле [10, стр. 35 форм. 1.71b]

$$Z = \sum_k g_k e^{-\epsilon_k/kT} \quad (3.18)$$

Условие нормировки для формулы (3.16) позволяет вычислить свободную энергию  $F$  через вероятности квантовых состояний:

$$1 = \sum_n^N w_n = e^{F/T} \sum_n^N e^{-E_n/T} \\ \Rightarrow F = -T \ln \sum_n^N e^{-E_n/T} \quad (3.19)$$

Применим общую формулу (3.16) для вычисления свободной энергии идеального газа, подчиняющегося статистике Больцмана. Написав энергию  $E_n$  в виде суммы энергий молекул  $\epsilon_k$ , можно свести суммирование по всем состояниям газа к суммированию по всем состояниям отдельной молекулы, как и в случае распределения Максвелла. Каждое состояние газа будет определяться набором  $N$  ( $N$  — число молекул в газе) значений  $\epsilon_k$ , которые в больцмановском случае можно считать все различными между собой (в каждом молекулярном состоянии — не более одной молекулы в силу ограничений, налагаемых волновыми функциями для фермионов, поскольку именно с такими объектами работает Барометрическая формула). Записав  $e^{-\frac{E_n}{T}}$  в виде произведения множителей  $e^{-\frac{\epsilon_k}{T}}$  для  $\forall$  из молекул и суммируя независимо по всем состояниям каждой молекулы, мы получим выражение, соответствующее  $N$

$$\left( \sum_k e^{-\epsilon_k/T} \right)^N = \sum_n e^{-E_n/T} = \frac{1}{N!} \left( \sum_k e^{-\epsilon_k/T} \right)^N \quad (3.20)$$

При этом все наборы  $N$  различных значений, отличающиеся лишь распределением одинаковых молекул газа по уровням  $\epsilon_k$  соответствуют одному и тому же квантовому состоянию газа. Вместе с тем, в статистической сумме, в формуле, выше каждое из состояний должно учитываться лишь один раз. Поэтому мы должны еще разделить выражение полученное выражение на число возможных перестановок  $N$  молекул друг с другом, т. е. на  $N!$  и оценить значение с применением формулы Стирлинга  $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

В результате такой оценки получим формулу для свободной энергии больцмановского идеального газа:

$$F = -NT \ln \left[ \frac{e}{N} \sum_k e^{-\epsilon_k/T} \right] \quad (3.21)$$

В случае вырожденных энергетических уровней число повторов соответствующего значения  $\epsilon_k$  равно кратности вырождения. Что произойдет с формулами (3.17) и (3.18) для смеси газов? Для ответа на поставленный вопрос обратится к большому каноническому распределению Гиббса с переменным числом частиц:

$$w_{n,N} = A \exp \frac{\Omega + \mu N - E_{n,N}}{T} \quad (3.22)$$

Здесь выше — функция распределения подсистемы одного идеального газа по двум переменным:

- значению энергии  $E_n$  и числа частиц  $N$
- $\Omega$  - термодинамический потенциал
- $T$  — абсолютная температура в энергетических единицах
- $\mu$  — химический потенциал молекулы.

Теперь определим функция распределения подсистемы смеси идеальных газов газа по переменным — значению энергии  $E_n$  и числа частиц  $N_1, N_2, N_3$  — здесь также возможны вырожденные уровни энергии.

$$w_{n,N_1,N_2,\dots} = A \exp \frac{\Omega + \sum_i \mu_i N_i - E_{n,N_1,N_2,\dots}}{T} \quad (3.23)$$

Энергию  $E_n$  также можно представить в виде суммы энергий молекул  $\epsilon_k$ , за счет чего свести суммирование по всем состояниям газа к суммированию по всем состояниям отдельной молекулы.

Для смеси идеальных газов приведенные выше формулы остаются в силе, только вместо  $N$  подставляется количество молекул соответствующего газа. Для смеси газов обладают свойствами аддитивности следующие термодинамические переменные: число молекул, энергия, энтропия, парциальное давление каждого газа термодинамически потенциал и ряд других. При этом объем и температура по правилам термодинамики одинаковы для всех молекул каждого газа из смеси. Отметим, что благодаря отсутствию взаимодействия между молекулами происходит суммирование значений энтропии и соответственно, перемножение объёмов фазовых пространств (3.12) Легко проследить аналогию формулы (3.23) с логарифмом формулы (3.1) и убедиться в их подобии. Хотя формулы имеют небольшие отличия, но это не должно обескураживать. Подкрепляет такую уверенность формула, моделирующая фазовое пространство и энтропию (3.10). Пары произведений в (3.23)  $\mu_i N_i$  под знаком суммы входят симметрично. В этой формуле можно произвести суммирование по всем состояниям энергетических уровней, а не молекул. Состояние энергетических уровней определяется квантово-атомными параметрами молекулы, изучаемых на уроках химии в школе.

### 3.8 Именно радикалы чисел A, B, C!

ABC-гипотеза оперирует понятием «качества тройки чисел» на основе десятичного логарифма. (Допустим переход к натуральному логарифму путем одновременного деления числителя и знаменателя  $\ln 10$ ). Радикалу произведения чисел  $Rad(ABC)$  соответствует например смесь идеальных газов с невырожденными уровнями энергии, что достигается при достаточно низкой температуре, когда активированы только поступательные степени свободы и вращательные для многоатомных молекул. С учетом сказанного выше это будет означать первую степень простых чисел формулы (3.1).

За счет уравнения Клапейрона  $PV = kNT$  можно контролировать температуру, давление газов регулируя начальную температуру, число молекул смеси (концентрацию) и объем подсистемы. С помощью термодинамических соотношений легко рассчитывается энергия молекул газа и энтропия, а значит и объем фазового пространства  $\Delta\Gamma_i = \exp(S(E_i))$ . Далее можно подобрать  $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3 \dots$  — статистические веса газов 1, 2, 3 в смеси соответственно равными простым числам формулы (3.1) в первой степени - радикалу  $Rad(ABC)$ . Обозначим такое значение объема фазового пространства под  $\Delta\Gamma_0$ , а соответствующую ему энтропию  $S_0 = \frac{\ln Rad(ABC)}{L}$ , в знаменателе этой дроби необходимо по определению энтропии (3.10) произвести усреднение значения логарифмов от значений по диагонали статистической матрицы, а длина этой диагонали или общее число элементов  $L = k+l+m$  вычислена из формулы 3.1 и равна общему числу простых сомножителей в ABC-гипотезе. Если каждая из подсистем может находиться в одном из  $\Gamma_\alpha$  квантовых состояний, то фазовые объемы подсистем перемножаются, а энтропии подсистем складываются.

При адиабатическом сжатии основное уравнение термодинамики примет вид внутренней энергия газа уменьшается (увеличивается) как раз на величину произведенной газом (над газом) работы. Согласно формуле первого закона термодинамики  $dQ = dE + PdV$ , где  $dQ$  — количество тепла,  $P$  — давление газа,  $dV$  — малое приращение объема, сомножитель  $PdV$  равен произведенной работе. При адиабатическом процессе  $dQ = 0$ , теплового обмена нет, отсутствуют диссипативные процессы, а следовательно все изменения подсистемы остаются обратимыми и  $dE = -PdV$ .

Из школьного курса термодинамики известно, что при адиабатическом процессе соотношение между давлением и объемом / температурой и объемом соответственно приобретает вид

$$PV^\gamma = const \dots TV^{\gamma-1} = const \quad (3.24)$$

где  $\gamma > 1$  — это частное от деления теплоемкости при постоянном давлении на теплоемкость при постоянном объеме газа  $\frac{C_p}{C_v}$ . При адиабатическом сжатии энтропия системы остается постоянной, но «включаются» вырожденные уровни энергии  $\epsilon_k$ , за счет увеличения температуры.

Это сопровождается появлением степеней выше единицы в формуле (3.1). Обозначим такое статистическое состояние системы литерой  $\bar{D}$ , символизирующей появление вырожденных энергетических уровней, а энтропию соответственно  $S_{\bar{D}}$ . (детали раскрыты ниже). Далее выделим фазовый объем, соответствующий некоторым обобщенным координатам либо импульсам (например, связанными с квантовыми эффектами), в отдельные подмножества исследуемого фазового пространства: A, B и C, в соответствии с индексами, перечисленными в формуле (3.1). Как было сказано выше, энтропия является аддитивной функцией.) В силу адиабатического сжатия, сохраняющего энтропию, и условий поставленного эксперимента получим:

$$q_{ABC_{max}} = \frac{\ln(C)}{\ln Rad(A) + \ln Rad(C-A) + \ln Rad(C)} = \frac{S_C \cdot m}{S_0 L} = \frac{S_C \cdot m}{(S_A + S_B + S_C)L} < 1 \quad (3.25)$$

В этой формуле производится верхняя оценка  $q_{ABC}$ , через формулировку ABC-гипотезы. После второго знака равенства происходит переход к термодинамическим (статистическим) переменным. В числителе знаменателе приведено значение энтропии фазового пространства с учетом множителей  $m$  и  $L = (k+l+m)$ , выраженное через определение энтропии подсистемы C в составе исследуемой системы D в условиях адиабатического процесса.

Задача о нахождении экстремума функции в виде следующей первой по порядку дроби сводится к нахождению максимального и минимального значения знаменателя, где переменной частью является число A, при этом  $C = Const.$  => минимум  $q_{ABC}$  достигается при  $A = C/2$  что легко понять из симметричного вхождения переменной части выражения под знаком логарифма в знаменателе, анализируя функцию вида  $y = x(c-x)$ .

Помним, что (A - произведение из простых чисел в некоторой степени). Задача состоит в получении верней оценки. Максимальное слагаемое в знаменателе ABC-гипотезы и формуле (3.25) будет  $\leq \frac{m}{L} < 1$ . Энтропия при адиабатическом процессе не изменяется.

Между тем, в ходе численных экспериментов [12] найден ряд максимальных значений  $q_{ABC}$  выше единицы. Как объяснить этот парадокс? - Автор убежден, что это явление обусловлено



флуктуациями, как это объясняется ниже, в специально посвященном этому явлению разделу.

#### 4 С позиции чистой математики

Для поиска доказательства АВС-гипотезы математическими методами необходимо использовать правила линейной алгебры, представления квантовой механики о волновой функции, операторную форму гамильтониана, оценки энтропии [10, 1.18] с помощью статистической матрицы [9, с. 28-29] в квантово-механическом представлении. Стремительное развитие квантовых вычислений и криптографии способствует популяризации знаний о квантовой механике. Чтобы расширить кругозор школьника XXI века, было бы логично расширить программу средней школы основами квантовой механики, прибегая к аналогии с радиоволнами, спектрами сигналов. Много лет в школе на уроках химии изучается электронная конфигурация атома, расположение электронов в атоме по уровням и подуровням на основе общих представлений о квантовой механике. Исходя из условий АВС-гипотезы следует выбрать аддитивную функцию. Наиболее подходящим кандидатом является энтропия, определяемая как логарифм фазового пространства (3.10). При адиабатических процессах объем фазового пространства сохраняется. Это простое утверждение является ключом к доказательству и практически не требует математических вычислений. Формула (3.1) подразумевает статистическое описание некоторой физической системы, состоящей из подсистем, выражающую аддитивное свойство общего ресурса для энергии, энтропии и др. термодинамических величин. Эти свойства обеспечивают разложение целых чисел А, В, С на простые, для которых НОД = 1. Из вводного курса теории чисел известно, что правила действуют для кольца целочисленных многочленов в некотором поле комплексных чисел  $k[x]$ . Такого вида многочлены обладают рядом свойств, аналогичных целым числам. Существует гомоморфизм между алгеброй целых чисел и алгеброй многочленов для операций сложения, умножения. Ниже термины простой и неприводимый, применительно к многочленам, будут употребляться в качестве синонимов. Пусть  $f \rightarrow k[x]$ , тогда существует однозначное разложение:

$$f = c \prod_p p^{\alpha(p)}, \quad (4.1)$$

где  $c$  - константа и произведение берется по неприводимым многочленам вида  $(\lambda - a_i)^k$  [13 Гл. 1 теорема 2]. Степени и константа определяются однозначно.

$$\begin{aligned} & (\lambda - a_1)^{\alpha_1} (\lambda - a_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - a_k)^{\alpha_k} q_1(\lambda) \\ & + (\lambda - b_1)^{\beta_1} (\lambda - b_2)^{\beta_2} \dots (\lambda - b_l)^{\beta_l} q_2(\lambda) \\ & + (\lambda - c_1)^{\gamma_1} (\lambda - c_2)^{\gamma_2} \dots (\lambda - c_m)^{\gamma_m} q_3(\lambda) = 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

В формуле выше записаны целочисленные многочлены, на основе неприводимых, они также являются взаимно простыми [14, с. 333], что кратко выражено в формуле выше: существуют многочлены  $q_1, q_2, q_3$ , итоговая сумма формулы (3.1) = НОД = 1.

Каждому многочлену из приведенных можно однозначно сопоставить линейное отображение  $\mathcal{A}$  (соответственно  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$ ) с характеристическим многочленом [16], корни которого взяты из формулы (3.1) - это будут как раз простые числа, входящие в  $Rad(ABC)$ . Если линейное преобразование размерности  $n$  имеет  $n$  независимых собственных векторов, то принимая эти векторы в качестве базисных, мы приведём квадратную матрицу линейного преобразования к диагональному виду, при этом собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, будут линейно независимы, и можно подобрать такой базис, в котором такие векторы будут ортогональны. Для случая кратных корней имеем:

$$(\lambda I - \mathcal{A})^k \mathbf{x} = 0 \quad (4.3)$$

путем элементарных преобразований матрицу линейного отображения можно привести к жордановой форме размером  $k * k$  соответствующей кратности  $k$  (высоте) корневого вектора [14,15]. Собирая всё вместе, можно получить некоторое линейное отображение, характеристический многочлен которого является произведением характеристических многочленов линейных отображений из формулы (3.1.) Матрица, соответствующая этому объединенному линейному отображению, будет иметь блочно-диагональный вид  $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ . Собственные значения матрицы — это результат объединения собственных значений матриц  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  В результате достигается однозначное разложение пространства  $\mathbb{R}$  на прямую сумму инвариантных подпространств (порядок их следования не играет роли):

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4 \oplus R_5 \dots \oplus R_i \quad (4.4)$$

Множество всех корневых векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda$ , образует инвариантное подпространство  $R_i$ . Это линейное пространство описывается матрицей  $\tilde{D}$ . Приравняем детерминант этой матрицы и соответствующий её

характеристический многочлен нулю для поиска собственных значений и векторов:

$$Det\tilde{D} = \prod_{i=1}^{i=L} (\lambda - \lambda_i)^{k_i} = 0 \quad (4.5)$$

где  $L$  - число простых чисел в формуле (3.1)  $\lambda_i$  — это собственное/корневое значение линейного отображения  $\tilde{D}$  и соответственно матрицы  $\tilde{D}$ . Из алгебраической теории матриц известно, что над  $\lambda$ - матрицами можно совершать элементарные преобразования, создавая тем самым подобные матрицы, но при этом остаются постоянными след матрицы т.е. сумма его элементов, расположенных на главной диагонали, и детерминант  $det$  - обе величины не зависят от базиса и являются инвариантными. Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots \lambda_i$  - собственные значения матрицы, они как раз взяты из многочлена (4.2) с корнями из набора простых чисел (3.1), но с применением функции логарифма и усреднения по главной диагонали матрицы (подробнее в формуле (4.9)), все эти собственные значения различны, ненулевые по условиям ABC-гипотезы. Известно, что детерминант матрицы равен произведению собственных значений. В нашем случае с позиции термодинамики  $det\tilde{D}$  соответствует фазовому пространству исследуемой системы с невозбужденными энергетическими уровнями  $\Gamma_0 = Rad(ABC) = det\tilde{D}$ .

Поскольку мы рассматриваем квадратные матрицы и в силу свойства коммутируемости матрицы с собой, в ряде случаев, включая исследуемый, можно возводить  $\lambda$  матрицу  $\tilde{D}$  в степень, совершать над ней алгебраические операции, вычислять многочлены от матрицы.

Это иллюстрирует общее правило гомоморфизма (Гомоморфизм в категории алгебраических систем это отображение алгебраической системы  $A$  в  $B$ , сохраняющее основные операции и основные отношения.)

$$A = \langle A, \phi \rangle B = \langle B, \psi \rangle, f : A \rightarrow B$$

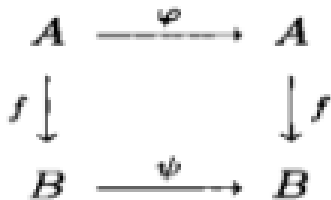


Рис. 1: Общее правило гомоморфизма над алгебрами.

В целом, от квадратной матрицы можно вычислять скалярные функции путем разложения в ряд Тейлора, но с некоторой спецификой [16, 182-183]. В теории аналитических функций (т. е. имеющих производную комплексной плоскости из чего следует

удивительный вывод о бесконечной дифференцируемости аналитической функции [15]). Известно, что ряд от комплексной переменной обладает свойством сходимости на некотором кольце сходимости  $r < |z| < R$  на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  [15, стр. 64], за исключение полюсов.

Вычислим логарифм от матрицы  $\tilde{D}$  с уже кратными корнями (4.2). Здесь выбраны в качестве базиса различные собственные / корневые векторы, являющиеся простыми числами и поэтому матрица будет иметь блочно-диагональный вид (порядок следования клеток Жордана не существен). Функция  $F$  работает с каждой жордановой клеткой отдельно [15 стр. 182]:

$$F(D) = F_1(D_1) \oplus F_2(D_2) \dots \oplus F_i(D_i) \quad (4.6)$$

(Из этого разложения легко сделать вывод о возможности по-клеточного / по-блочного сравнения функций от матриц, который будет использован ниже). От жордановой клетки вычислить логарифм достаточно просто, применив разложение в ряд Ньютона-Меркатора (ряд Тейлора для функции натурального логарифма от матрицы):

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

и далее представить матрицу справа от знака равенства в виде суммы единичной матрицы  $\mathbf{I}$  и матрицы  $\mathbf{G}$ , на диагоналях которой находятся нулевые значения:  $\mathbf{G} = \lambda(\mathbf{I} + \mathbf{D})$ . Применив хорошо известное разложение логарифма в ряд Тейлора для скалярной переменной и с учётом сказанного применимого в равной мере для матрицы  $\mathbf{G}$  имеем:

$$\ln(\mathbf{I} + \mathbf{G}) = \frac{\mathbf{G}}{1} - \frac{\mathbf{G}^2}{2!} + \frac{\mathbf{G}^3}{3!} - \frac{\mathbf{G}^4}{4!} \dots \quad (4.8)$$

Этот ряд обрывается на некоторой степени, поскольку жорданова клетка является нильпотентной и, будучи возведенная в степень  $k$  (размерность жордановой клетки), обращается в нулевую матрицу. В результате легко вычислить энтропию

$S = \ln \Delta \Gamma$ , путем усреднения по всем микроканоническим состояниям. Важно принимать во внимание условие нормировки - сумма по всем вероятностям состояний исследуемой системы, образует полную группу событий  $\Rightarrow \sum_{i=1}^{i=L} \lambda_i = 1$ . Здесь вероятность выражена от собственного значения  $\lambda_i$ , однозначно связанного с энергией микросостояния, суммирование производится по всем возможным микросостояниям и на главной диагонали матрицы  $\tilde{D}$ , расположены ненулевые значения. Длина это диагонали составляет  $L = k + l + m$  — число простых сомножителей в АВС-гипотезе см. формулу (3.1).

Начальное значение энтропии  $S_0 = \frac{\ln \text{Rad}(ABC)}{L}$  Логарифм от произведения разлагается в сумму логарифмов и равно усредненному значению от следа матрицы энтропии  $\Rightarrow$  деление на число ненулевых значений на главной диагонали матрицы  $\mathcal{D}$  т.е. длина цепочки  $L$  в формуле (3.1). Пусть в момент времени  $t_1$  включается вырождение энергетических уровней, что на языке алгебры матриц означает появление кратных собственных значений — корневых векторов (4.3). Это можно реализовать путем «включения» в характеристическом множителе, степеней больших, чем единица:

$$\frac{1}{L} \prod_{i=1}^{i=L} \frac{e^{-\frac{E_i}{T}}}{1 + \sigma(t - t_1)(k_i - 1)} (\lambda - \lambda_i)^{1 + \sigma(t - t_1)(k_i - 1)} \quad (4.9)$$

а далее остаётся привести соответствующую этому характеристическому многочлену матрицу к жордановой форме и взять от полученной матрицы логарифм. Поясним значение переменных:

- $\lambda_i$  — все простые числа — сомножители из L-ряда чисел  $\text{Rad}(ABC)$ , они же являются собственными значениями линейного отображения / матрицы
- $k_i$ - это показатель степени из формулы (4.2), одновременно кратность корня и размер i-ой клетки Жордана линейного отображения
- $\sigma$  — функция сигмоида  $\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-\nu(t - t_1)}}$  она может быть приближена по формуле, где параметр  $\nu$  задается извне и регулирует плавность изменения, чем больше значение  $\nu$ , тем круче «ступенька» в момент времени  $t_1$ . Эта функция здесь определена на действительной оси  $\mathbb{R}$
- $E_i$  - энергия, в расчете микросостояние  $i$ . Этот сомножитель в степени экспоненты, деленный на температуру  $T$  определяет плотность распределения вероятности в зависимости от гамильтониана исследуемой системы.

Выше после формулы (4.4) был сделан вывод о возможности разложения линейного простран-

ства в прямую сумму подпространств, что означает приведение матрицы к жордановой форме. Для каждой клетки - уникальный корень  $\lambda_i$ . Поскольку в пределах каждой жордановой клетки сомножитель  $e^{-\frac{E_i}{T}}$  остается одним и тем же, можно его рассматривать как константу и в рассуждениях ниже сократить ("по-клеточное" / "поблочное" сравнение матричных функций). С позиции школьной физики можно заметить, что при изучении идеальной машины Карно расчет К.П.Д. производится на основе величины  $\frac{\delta Q}{T}$ , которая является дифференциалом энтропии. Следовательно, формула (4.9), с учётом определения энтропии (3.10) оперирует с вероятностными величинами, что в свою очередь является чисто математическим понятием, исключает такую непривычную для алгебры матриц величину как температура (последняя может быть определена для исследуемой системы из канонического определения Гиббса путем взятия частной производной энтропии по энергии).

Функция (4.9) дифференцируема и может быть аналитически продолжена на комплексную плоскость. Это значит, что её можно расположить по главной диагонали жордановой форме и затем вычислить от результата матричный логарифм. Эта функция соответствует объему фазового пространства. Если только что упомянутую матрицу привести к жордановой форме, взять от каждого элемента на главной диагонали матрицы логарифм, и произвести усреднение по всем значениям, то получится значению энтропии исследуемой системы.

В самом деле, внимательный взгляд на (4.9) выявляет формулу (3.10) для нахождения энтропии. Усреднение по всем микросостояниям достигается путем деления на общее число микросостояний. Каждое микросостояние считается равновероятным. При вычислении среднего значения логарифма от матрицы знак произведения в формуле (4.9) заменится на суммирование. Немного громоздкий знаменатель дроби после знака произведения в этой формуле позволяет сделать сначала усреднение значения логарифма элемента на главной диагонали по каждой жордановой клетке отдельно с учетом кратности (степени) каждого сомножителя. По результатам такого по-клеточного усреднения сократиться показатель степени каждого простого числа из матрицы. Далее проводится усреднение по всей диагонали матрицы, где уникальное значение каждого простого числа встречается лишь один раз, а всего таких чисел  $L$ . Происходит «размазывание» плотности вероятности от операции усреднения по всем возможным клеткам Жордана и с учетом кратности корневого вектора  $\lambda_k$  т. е. его высоты или показателя степени простого числа в формуле АВС-гипотезы.

$$S = - \langle \ln w(\lambda_i) \rangle = - \sum_i w_i \ln(w_i) \\ = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{i=L} \frac{1}{k} \ln(\lambda_i^k) e^{-\frac{E(\lambda_k)}{T}} \quad (4.10)$$

При адиабатическом сжатии/расширении объем фазового пространства системы и усредненный матричный логарифм от него — энтропия остаются постоянными. Сомножитель  $e^{-\frac{E_k}{T}}$  качественно не меняет главного вывода: сохранение энтропии в результате адиабатического изменения макросостояния системы. При этом след матрицы  $\tilde{D}$  равен сумме следов объединённых матриц. Можно сопоставить начальное значение энтропии  $S_0$  со значением в момент времени  $t_1 + 0$  и далее выделить некоторые степени свободы исследуемой системы отдельно. Выше рассматривалась ситуация когда квазиклассическим является не всё движение системы, а лишь движение, соответствующее части степеней свободы, в то время как по остальным степеням свободы движение является квантовым. Поскольку энтропия сохраняется во время адиабатического процесса, можно вернуть подсистему в исходное состояние.

Громоздкую формулу (4.9) и формулу (4.10), основанную на знаниях статистической физики, можно заменить уравнением адиабаты из школьного курса (3.24), ограничиваясь общим описанием вырожденных энергетических уровней и соответственно появлением жордановых клеток, размером более единицы, что существенно упрощает понимание сути доказательства.

Таким образом, можно сформулировать в виде следующих уравнений простое матричное соотношение:

$$Tr(\tilde{D}) = Tr(\mathbf{A}) + Tr(\mathbf{B}) + Tr(\mathbf{C}) \quad (4.11)$$

очевидное из анализа главной диагонали матрицы  $\tilde{D}$  блочно-диагонального вида  $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}$ .

А следующая формула означает усреднение статистических переменных с учетом весов слагаемых (длин диагоналей  $L = k + l + m$  каждого блока матрицы  $\tilde{D}$ ).

$$\frac{1}{L} Tr(\tilde{D}) = \frac{k}{L} \frac{Tr(\mathbf{A})}{k} + \frac{l}{L} \frac{Tr(\mathbf{B})}{l} + \frac{m}{L} \frac{Tr(\mathbf{C})}{m} \quad (4.12)$$

Из последнего вытекает равенство  $S_D = S_A + S_B + S_C$  или в терминах следов матриц:

$$Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_{\tilde{D}} = Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_A + Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_B \\ + Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_C \quad (4.13)$$

Что просто выражает свойства аддитивности энтропии, в частности, при разделении переменных. По условиям АВС-гипотезы  $A + B = C$ , Важно помнить, что  $\frac{S_{\tilde{D}}}{S_0} = 1$ . Максимальное значение  $q_{ABC}$  легко вычислить из двух последних формул.

#### 4.1 Статистическая матрица для произвольных А, В, С

Школьная программа включает в себя основы комбинаторики и теории вероятностей, движение маятника, уравнения осциллятора, основы термодинамики, внутреннюю энергию, количество тепла, первый закон термодинамики, интерференцию волн, спектр сигналов, резонансные явления корпускулярно-волнового дуализма и фотонов, явление фотоэффекта, атомные орбитали и спин, принцип неопределенности Гейзенберга, основы лабораторных измерений и их погрешности и так далее. - Этот обширный список понятий позволяет провести аналогию излагаемого материала со школьной программой.

Можно сопоставить линейным отображениям  $A, B, C$  квантово-механическую систему. Перейдем от евклидова пространства к гильбертову. Гильбертово пространство, изученное в первом десятилетии 20-го века Дэвидом Гильбертом, Эрхардом Шмидтом и Фриджесом Рисом в рамках теорий дифференциальных уравнений в частных производных и квантовой механики, может быть объяснено школьникам с позиции основ радиофизики, уравнений, описывающий распространение электромагнитной волны, явление интерференции.

Здесь ортогональные векторы — ортонормированная система функций, так что любой оператор  $\hat{Q}$  выражается через  $\langle n | \hat{Q} | m \rangle = \int \psi_n^* \hat{Q} \psi_m dq$  Если  $\hat{Q}$  явно не зависит от времени и коммутирует с гамильтонианом, то его матричные элементы  $\langle n | \hat{Q} | m \rangle$  не меняются со временем. Это квантовая форма интегралов движения. Важно отметить, что для нашего случая все собственные значения  $\lambda$  т.е. энергии микросостояний вещественны, то это означает что оператор  $H$  эрмитов — соответствующая матрица, будучи транспонированная и сопряженная, вновь обратится в себя. Замечательное свойство эрмитовости оператора обеспечивает коммутативность гамильтониана с рядом операторов, такие как энергия, энтропия. Заметим, что производная от статистической матрицы по времени коммутирует с гамильтонианом:

$$[\hat{H}, \hat{w}] = 0 \quad (4.14)$$

Для рассматриваемых физических явлений это условие соблюдается. И результат представляет собой квантомеханический аналог теоремы Лиувилля: коммутативность оператора какой-либо величини

ны с гамильтонианом как раз и является квантово-механическим выражением сохраняемости этой величины во времени.

Собственное значение  $\lambda_i$  соответствует энергии подсистемы  $E_i$ . И как легко догадаться сумма собственных значений на главной диагонали - энергии всей системы  $E$  (энергия - это также аддитивная переменная)

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (4.15)$$

Собственные значения гамильтониана системы, состоящей из двух подсистем принято записывать так:

$$\hat{H}|n, m\rangle = (E_1 + E_2)n.m > \quad (4.16)$$

эту формулу можно распространить на случай ряда подсистем и убедиться в аналогии с инвариантными подпространствами см. (4.4).

Для нахождения статистической матрицы для произвольных чисел  $A, B, C$  предположим сначала, что система находится в чистом квантовом состоянии с волновой функцией  $\langle n|\hat{\psi}|m\rangle$ . Распределение вероятностей для координат определяется при этом квадратом модуля:

$$|\psi|^2 = \sum c_m^* \cdot c_n \psi_m^* \psi_n \quad (4.17)$$

Где произведение коэффициентов разложения волновой функции  $\psi$  по системе ортонормированных (базису)  $c_m$  и  $c_n$  можно заменить на вероятность  $w_{nm}$ . В результате находим следующую формулу для распределения вероятностей по координатам (здесь остаются диагональные элементы статистической матрицы)

$$\begin{aligned} \sum \sum w_{mn} \psi_m^* \cdot \psi_n &= \sum \psi_n^* \hat{w} \psi_n \\ \Rightarrow dw_q &= \sum \psi_m^* \hat{w} \psi_m dq \end{aligned} \quad (4.18)$$

В написанном в такой форме выражении можно пользоваться в качестве функций  $\psi_n$  любой полной системой нормированных волновых функций. Задача об определении статистического распределения сводится к вычислению вероятностей  $w_n = w_{nn}$ , которые и представляют собой искомую функцию распределения в квантовой статистике. Формула для среднего значения произвольной величины  $f$  упрощается:

$$\langle f \rangle = \sum w_n f_{nn} \quad (4.19)$$

Вот почему для нахождения энтропии достаточно вычислить среднее от следа от статистической матрицы (3.10).

## 4.2 Аналогии из систем ЛДУ

Интересно сделать некоторые аналогии изложенного выше квантово-механического подхода с системами линейных дифференциальных уравнений. Пусть гамильтониан  $H$  исследуемой системы явно не зависит от времени, тогда в гейзенберговском представлении для описания этого простого случая применяется уравнение:

$$i\hbar\dot{\psi} = \hat{H}\psi \quad (4.20)$$

Унитарный оператор конечного сдвига во времени определяется по формуле [7. 19.4]:

$$\hat{U}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \quad (4.21)$$

Преобразование  $\hat{U}(t)$  переводит вектор  $\psi(0)$  в  $\psi(t)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \hat{U}(t)\psi(t_0) \\ \psi(t_0) &= \hat{U}^{-1}(t)\psi(t) \dots \psi(t_0) = \hat{U}^+(t)\psi(t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Сравним две последние формулы с некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, выраженной в матричной форме:

$$\dot{y} = \mathbf{D}(t)y \quad (4.23)$$

где  $\tilde{D}$  — блочно-диагональная матрица линейного отображения, в общем случае зависящая от времени  $t$ . По условиям АВС-гипотезы все собственные значения не равны нулю  $\Rightarrow$  матрица невырожденная, а все её собственные значения различны  $\det D = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ , начальный объем фазового пространства  $\Gamma_0 = \frac{Rad(ABC)}{L}$ . На диагоналях блочно-диагональной матрицы  $\tilde{D}$  расположены элементы, где  $k$  - размер жордановой ячейки, на диагоналях матрицы расположена аналитическая функция (4.9) с параметром, учитывающим адиабатические изменения в системе  $\tilde{D}$ .

Рассмотрим фундаментальную матрицу системы линейных дифференциальных уравнений  $Y$  и определитель Вронского  $W = \det|Y(t)|$ . Согласно теореме Лиувилля-Остроградского [15, параграф VIII (18)]:

$$\begin{aligned} W(t) &= W(t_0) \exp \int_{t_0}^t Tr D(\tau) d\tau \\ &\dots \prod_1^n \lambda_i = \exp \int_0^T Tr D(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.24)$$

В момент времени  $t_1$  кратность корней увеличивается, что физически соответствует вырожденным энергетическим уровням системы, но след матрицы под интегралом остается постоянным. Близкая по

смыслу формула найдена для определителя польского философа и математика Вронского, удобного для нахождения производной вектор-функции в системе линейных дифференциальных уравнений вида (4.23)).

Приведенные математические формулы раскрывают физический смысл фазового пространства и следа матрицы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Адиабатический процесс и постоянство энтропии играют важную роль. С этой позиции формулы для нахождения объема фазового пространства и энтропии системы имеют аналоги в теории систем линейных дифференциальных уравнений, кратко выраженной в матричной форме.

Продолжаем ряд примеров. Рассмотрим фундаментальную матрицу (т.е. состоящую из линейно независимых векторов решений (4.23) системы для которой действует простое соотношение:

$$Y(t, 0) = I$$

$$Y(t_1, t_2) = Y(t_2, t_1)^{-1} \quad (4.25)$$

Флоке в известной теореме доказал, что для периодических систем с периодом  $T$  (в смысле времени, а не температуры):

$$Y(t, 0) = \Phi(t) \exp(tM) \quad (4.26)$$

Собственные значения именуют мультипликаторами  $T$ -периодической системы. Исходя из сказанного выше, в нашем случае все эти мультипликаторы по модулю не больше единицы см. вторую часть формулы 4.24). Последние две формулы соответствуют унитарному оператору конечного сдвига во времени (4.22). где  $\Phi(t)$  периодическая функция с периодом  $T$ .

Имеются и другие аналогии фазового пространства  $W \rightarrow \Gamma$  и энтропии  $Tr(D(\tau)) \rightarrow S$ . Обратите внимание, что матрицы бесконечны и приведены к форме Жордана, рассматриваемая сигмовидная функция включает/выключает кратность корней и обеспечивает преобразование только что упомянутой матрицы.

Возникает вопрос, почему бы не записать приведенные выше уравнения с позиции аналитической механики при исследовании фазового пространства и энтропии либо их аналогов? В действительности, для реального физического объекта практически невозможно строго выдержать условия адиабатической изоляции. Сколь угодно малое нарушение этого условия означает возникновение малых случайных воздействий, по отношению к которым механические траектории неустойчивы как в обычном, так и в фазовом пространстве. Следствием неустойчивости в физической системе будет динамический

хаос, что приводит к явлениям перемешивания и забывания начальных условий и фактически означает переход к статистическому описанию. Сложные вопросы эргодической гипотезы, выходят далеко за рамками постановленного исследования.

### 4.3 Флуктуации

Для  $\forall$  формулы (3.1) существует целый класс физических подсистем: идеальные газы, растворы, колебания кристаллической решетки с квазичастицами — фононами, и так далее, где реализуются изложенные выше подходы. Значит существует функция эквивалентности  $f$ , отображающая каждый элемент в виде элементарного куба  $1^n$  из множеств  $A$  и  $B$  в  $C$ , т.е.  $f(A, B) \rightarrow C$ , Чему соответствует показатель качества тройки  $q$  или отклонения от изложенных принципов? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к полной системе, включающей исследуемую подсистему и флуктуации.

С учетом рассуждений выше и формулы следует найти подходящую интерпретацию показателю качества тройки  $q$ , Верхняя граница  $q$  асимптотически приближается к дроби  $\frac{m}{L} < 1$  по мере увеличения энтропии. (В термодинамике оперируют числом молекул, порядка числу/постоянной Авогадро - числа частиц, содержащихся в одном моле любого вещества  $6.02210^{23}$ ). Большинство известных примеров отыскания троек чисел с использованием суперкомпьютеров и распределенных вычислительных сетей т.н. «хороших троек» [12] с  $q > 1$  превышающих единицу ( $q_{max} \sim 1.4$ ), но эти больше спортивные, чем научные рекорды составляют порядка одной десяти тысячной от постоянной Авогадро.

Полагая верхнюю границу  $q_{max} = \frac{m}{L}$  эталонным значением для тройки чисел  $A, B, C$ , при больших  $N$ , удобнее заменить слово «качество» на более подходящее «дефект» по формуле флуктуации от среднего значения, а именно  $\Delta q = \frac{\Delta S}{S_0}$ . Для изолированной подсистемы не уместна сама постановка о флуктуации энергии, энтропии, температуры, числа частиц и других термодинамических параметров - говорить о флуктуации можно лишь рассматривая систему в целом. Пусть определена равновесная энтропия тела  $S(E, V)$ , как функция его (средних) энергии и объема. Будем понимать под флуктуацией энтропии изменение функции  $S(E, V)$ , рассматриваемой формально, как функция от точных (флуктуирующих) значений энергии и объема. Известно, что вероятность флуктуации в системе пропорциональна экспоненте с отклонением энтропии:

$$w = e^{\Delta S} \quad (4.27)$$

здесь имеется ввиду энтропия системы в целом.

Для начала найдем средний квадрат флуктуации числа частиц обычного идеального газа, находящихся в некотором выделенном в газе относительно малом объеме. Исходя из равномерного распределения молекул газа по всему объему  $V_0$  и условий о малости исследуемой подсистемы в сравнении со всей системой  $\frac{V}{V_0} \ll 1$  квадрат флуктуации числа частиц в подсистеме (точек в многообразии фазового пространства  $1^n$ ) определяется по формулам [9 формула 113.1]:

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = N; \dots \frac{(\langle (\Delta N)^2 \rangle)^{1/2}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (4.28)$$

Относительная флуктуация числа частиц равна обратному квадратному корню из среднего числа частиц. Аналогичные формулы хорошо известны из учебников математической статистики [11]. Исходя из среднего квадрата части в заданном объеме газа находится гауссово распределение вероятности флуктуации числа частиц:

$$w(N)dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{N}}} \exp\left(-\frac{(N - \bar{N})^2}{2\bar{N}}\right) dN \quad (4.29)$$

Эта формула применима для малых отклонений. Для больших отклонений уместнее применять формулу Пуассона, известную из математической статистики [11].

$$w_n = \frac{\bar{N}^n e^{-\bar{N}}}{n!} \quad (4.30)$$

В интересующем нас случае (выделенный объем)  $V \ll V_0$  (исходный объем) число частиц в выделенном объеме хотя и может значительно отличаться от своего среднего значения, но предполагается малым по сравнению с полным числом частиц в газе. С учетом формулы Стирлинга  $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  формула (4.29) переходит в формулу (4.30) при малых отклонениях.

Касаясь вопроса о флуктуации энтропии, заметим следующее. Согласно теореме Чебышёва [11, глава 9.3], "при наличии достаточно большого числа независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями событие можно считать практически надежным, что означает, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет сколь угодно малым по абсолютной величине условия".

В силу теоремы Чебышёва и свойства аддитивности энтропии можно применить Гауссово распределение вероятности (4.28 -4.30) для флуктуации энтропии  $\Delta S = \sqrt{S_0}$  и верхней границы  $\Delta q_{max}$ . В самом деле, количество частиц в газе, равно как

и энтропия являются аддитивными величинами и интегралами движения, поэтому они должны описываться аналогичными формулами. Достаточно мысленно поставить эксперимент по разделению исходного сосуда на  $N$  малых эквивалентных сосудов, при этом  $N$  — это достаточно большое число, но заведомо намного меньшее, чем число Авогадро и число молекул в системе. Тогда вместо среднего числа частиц в формулах для оценки флуктуации выше можно подставить значение энтропии.

Вопрос о плотности распределения простых чисел остаётся в науке открытым. Вместе с тем, можно ввести функцию, ограничивающую  $\Delta q$  сверху

$$\Delta q_{ABC_{max}} = \frac{(\langle (\Delta S)^2 \rangle)^{1/2}}{S} = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \approx \sqrt{\frac{L}{(\ln(\text{Rad}(ABC)))}} \quad (4.31)$$

В силу того, что флуктуация энтропии подчиняется закону нормального распределения и (4.31), аналогичное верно для  $\Delta q_{ABC_{max}}$ .

Для оценки верхней границы максимального отклонения  $\Delta q_{ABC_{max}}$ , можно принять во внимание дискретный характер фазового пространства и принцип равной вероятности микросостояний, а также условие нормировки (3.8). Максимальному отклонению  $\Delta q_{ABC_{max}}$ , соответствует наименьшему значению вероятности. В свою очередь, вероятность такого микросостояния определяется лишь значениями на главной диагонали статический матрицы. Всего таких элементов  $L$  наименьшее целое - это единица, в результате имеем:  $w_{min} = \frac{1}{L}$ , что согласно закону нормального распределения соответствует:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{\Delta q_{max}^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.32)$$

Где стандартное отклонение  $\sigma$  определяется через:

$$\sigma = \sqrt{\frac{L}{(\ln(\text{Rad}(ABC)))}} \quad (4.33)$$

Заметим, что  $L \leq \pi(\text{Rad}(ABC))$  функции Римана  $\pi$ . Это утверждение просто констатирует, что длина цепочки из различных простых чисел в формуле (3.1) не превосходит общего числа простых чисел, не превосходящих  $\text{Rad}(ABC)$ , определяемого функцией Римана от радикала произведения  $A, B, C$ .

Поясним, что функция Римана  $\pi(x)$  определяет как число простых чисел, не превышающее целое число  $x$ . Чебышёв в 1851 - 1852 годах доказал, что

если существует предел, то он должен быть равен единице:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\ln(x)/x} = 1 \quad (4.34)$$

Из чего следует вывод:  $\frac{L}{\ln(\text{Rad}(ABC))} \leq \frac{1}{\text{Rad}(ABC)}$

Это соотношение тем точнее, чем больше значение  $\text{Rad}(ABC)$ . Разрешая уравнение (4.32) и предполагая, что выражение под знаком корня положительное, находим:

$$\Delta q_{ABC_{max}} = \sigma \sqrt{2 \ln \frac{L}{\sqrt{2\pi\sigma}}} \quad (4.35)$$

Результат алгебраических преобразований в конечном счёте выходит громоздким, но принимаем во внимание соотношение между длиной цепочки простых чисел и значением радикала  $\text{Rad}(ABC)$  малыми слагаемыми можно пренебречь (см. альтернативный способ оценки  $\Delta q_{ABC_{max}}$  ниже)

Из курса математической статистики известно:

$$|\Delta q_{ABC_{max}} < \epsilon| \leq 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \dots \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (4.36)$$

для любого заданного  $\epsilon$  существует только конечное число троек чисел, для которых верхнее значение индекса дефекта не входит в интервал  $\frac{m}{L} - \epsilon < \Delta q_{ABC_{max}} < \frac{m}{L} + \epsilon$  (не следует путать произвольный задаваемый параметр  $\epsilon$  с энергией одной молекулы, обозначаемой выше той же буквой!) Легко показать, что этот вывод эквивалентен другому представлению о дефекте  $q_{max, max}(A, B, C) < K(\epsilon) \text{rad}(A, B, C)^{1+\epsilon}$  где  $K(\epsilon)$  - определенная константа, зависящая только от  $\epsilon$ .

Альтернативный способ оценки  $\Delta q_{ABC_{max}}$  вытекает из Правила шести сигм, применимого для нормального распределения в математической статистике (0,5 ошибок на 1 миллион). Минимальная вероятность в формуле (4.32) обратно пропорциональна длине цепочки L. Цепочка длиной два миллиона из произведения простых чисел столь огромно, что превосходит число атомов во Вселенной (в соотношении 4.34 можно сделать замену переменных  $y = \ln x$  и убедиться, что для отклонения  $q_{ABC_{max}} \approx 3\sigma$  характерно появление в L-цепочке (3.1) простых чисел  $\approx 10^{434294}$ ). Следовательно фактор дискретности фазового пространства в результате принципа неопределенности Гейзенберга срабатывает раньше, чем Правило шести сигм.

Полученный результат можно сравнить с проектом ABC@home гистограмма качества троек q от числа десятичных разрядов в числах ABC. Рис. 2.2 Проект ABC@home находит все тройки ABC чисел

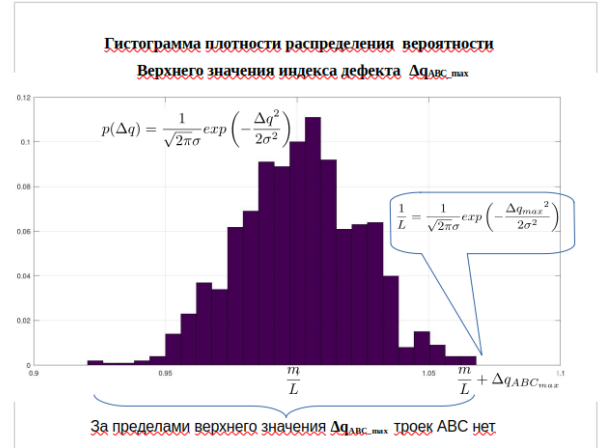


Рис. 2: Эта гистограмма иллюстрирует дискретную природу фазового пространства для исследуемой тройки чисел ABC. В случае  $q_{ABC} > \frac{m}{L} + \Delta q_{ABC_{max}}$  не существует ни одной тройки, удовлетворяющей ABC гипотезе.

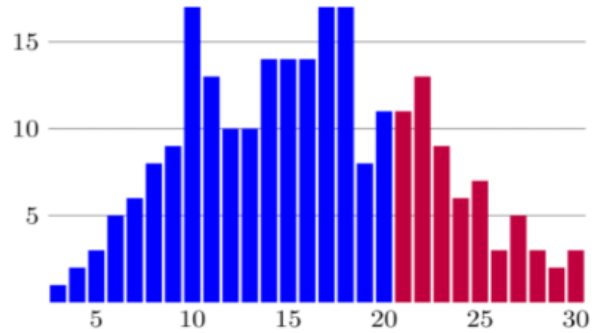


Рис. 3: Проект ABC@home находит все тройки ABC чисел для заданной верхней границы «качества»  $q_{ABC}$  и числа десятичных разрядов.

для заданной верхней границы «качества»  $q_{ABC}$  и числа десятичных разрядов.

В Проекте ABC@home говорится: "Список т. н. хороших троек, состоящий из 20 цифр, уже завершен. Например, на графике показано, что существует 11 хороших троек, в которых содержится 20 цифр. Когда будут обнаружены новые хорошие тройки, увеличится только красная часть на графике выше. (уже 20 десятичных разрядов)". В действительности в Проекте применена логарифмическая шкала к нормальному распределению  $q_{ABC_{max}} = 1 + \Delta q_{ABC_{max}}$  и далее количественный метод разделения набора ранжированных данных на равные подразделы (здесь - децили), но характерный вид нормального распределения (см. выше распределение Максвелла (3.14) и 2) от этого не изменился. Вместо использования суперкомпьютеров и распределенных вычислительных ресурсов автор просто с помощью кода в три строки создал выборку нормального распределения объемом 10 000 единиц и за несколько секунд получил аналогич-



ный результат в кросс-платформенном приложении GnuOctave (аналог MathLab по лицензии GNU GPL) на далеко не новом настольном компьютере. И так, количество частиц в газе, равно как и энтропия являются аддитивными величинами, формула (2.23-2.24) также подходит для оценки флуктуаций энтропии. Для этого достаточно мысленно поставить эксперимент по разделению исходного сосуда на  $N$  эквивалентных сосудов (в случае смеси газов эта операция должна быть произведена без разделения молекул разных газов, что привело бы к изменению энтропии), при этом  $N$  — это достаточно большое число, вместе с тем много меньше, чем число Авогадро / число молекул в системе. Вместо среднего числа частиц необходимо подставить значение энтропии. Нагляден контраст между трудно верифицируемым 500-страничным доказательством «Западной версии» ABC-conjecture Shinichi Mochizuki. Mochizuki's proof of ABC conjecture [17] и изложенным выше.

## 5 Простые числа. Системы. Логарифмы.

Трудно переоценить место простых чисел в физических законах, определяющих окружающий материальный мир и, в широком смысле, нашу Вселенную. Изложенный выше материал уже показал связь простых чисел с квантовой механикой, статистической физикой и вытекающей из неё теории вероятностей. См. таблицу (1).

Именно простые числа позволяет вместе связать систему, надсистему и подсистему. Вывод канонического распределения Гиббса был сделан исходя из равновероятного распределения по всем микростановлениям системы, вероятности нахождения сложной системы 1-2 равной произведению вероятностей её подсистем 1 и 2:  $\rho_{12} = \rho_1 \cdot \rho_2$ , что обуславливает удобство работы с логарифмами и позволяет оперировать с аддитивными переменными. Аддитивные функции для однородных величин — это основа для ряда натуральных чисел, для счетных множеств и произведения любых измерений => измеримость расстояний, ввод понятий метрики и меры. Свойства микромира определяет свойства макромира. => операция умножения является первичной в сравнении с операцией сложения / вычитания. С изложенных позиций можно объяснить аксиомы арифметики, введенных Джузеппе Пеано, а также принцип математической индукции, широко практикуемый в математических доказательствах.

Таблица 1: Один закон, одна алгебра.

Сложность понимания →			
Простые числа	Целочис. многочлены	Системы ЛДУ	Квантовая механика (линейные операторы, матрицы)
2.3.5.7.11 ...	$f = \prod_p p^{\alpha(p)}$	$\dot{y} = A(t)y$	$\hat{H}\psi = E\psi$
Простое число в степени $k$	Неприводим. многочлены $(\lambda - a_i)^k$	Вырожд. энергет. уровень	Кратный корень характер. многочлена матр.
Аксиомы арифметики	Возможн. алгебраических операций	Описание динамических процессов	Моделирует микромир
← Первопричина			

### 5.1 Заключение

Сделанные выводы могут быть обобщены на целый ряд подсистем и в равной мере относится как к математике (основы теории вероятности, логики), так и физике. Логично при этом определить логарифм от распределения вероятности и получить аддитивную величину — энтропию. Возможность выделения подсистемы в составе сложной системы и возможности задания функции позволили Архитектору Вселенной (если таковой существует даже вопреки скепсису атеистов) сделать мир управляемым и познаваемым, редуцировать сложные явления к простым.

Связь простых чисел с логарифмическими функциями представляется совершенно естественной. В ходе эволюции слух, зрение, осязание человека и животных адаптировались к логарифмическому закону, что позволяет адекватно воспринимать окружающую среду, органично продолжает законы природы, является следствием закона статистической механики и квантовой физики, теории вероятности.

Для наглядной иллюстрации проявлений свойств микромира достаточно сослаться на принцип неопределённости Гейзенберга  $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$ , проявляющихся в преобразованиях Фурье, в спектрах и сигналах: невозможно одновременно сузить полюсу спектр и длительность сигнала.

Свойства колец многочленов и линейных операторов являются производными от свойств простых чисел. Благодаря аддитивным свойствам энтропии

можно добиться уменьшения флуктуации легко измеримых величин: числа частиц, энергии, температуры, давления, по мере увеличения выборки и описать его простыми линейными соотношениями. Так реализуется связь микромира с макромиром. Эта связь подчиняется законам математической статистики (статистической физики). Поражает тот обстоятельство, что буквально с первых классов школьники изучают явления, в основе которых обнаруживается квантовая природа, фундаментальные законы нашей Вселенной: симметрия, однородность пространства, изотропность и т.д. Чтобы лучше почувствовать то удивление, которое испытывает автор, представьте себе мир без простых чисел, где любое число имеет сколько угодно делителей, где невозможно выделить часть из целого, где каждое явление нередуцируемо до более простых ...

Подытоживая изложенное, можно утверждать, что если бы простых чисел не было, то это изменило бы нашу Вселенную до неузнаваемости. Возможно ли было бы зарождение в мире без простых чисел человека разумного?

Важно отметить, что система может обладать свойствами эмерджентности (англиц. от «возникающий, неожиданно появляющийся») качественно новыми, не присущими её компонентам по отдельности. В социальной сфере большой интерес представляет сверхаддитивный эффект (т.е. «превосходящий сумму»), имеется в виду дополнительная прибавка в продуктивности групповой работы, превосходящая сумму вкладов отдельно друг от друга. Для таких случаев изложенный выше подход должен быть дополнен качественно новыми методами. Но такие сложные явления не входят в предмет исследования.

## 6 Литература и др. источники

1. D. W. Masser. Open problems (англ.) // Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory / W. W. L. Chen. — London: Imperial College, 1985. — Vol. 25.
2. J. Oesterlé. Nouvelles approches du "théorème" de Fermat (фр.) // Séminaire N. Bourbaki. — 1988. — Vol. 694. — P. 165–186. — ISSN 0303-1179.
3. Kevin Hartnett. Secret link uncovered between pure math and physics. In [quantamagazine.org](http://quantamagazine.org), editor, Secret Link Uncovered Between Pure Math and Physics Dec. 1, page 24. Quanta Magazine, 2017.
4. Авдывев М. А. Зачем школьнику XXI века доказательство Великой теоремы Ферма?: сборник трудов конференции. Наука, образование, общество: тенденции и

перспективы развития : материалы II Всеросс. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 17 нояб. 2023 г.) / редкол.: В. И. Кожанов [и др.] – Чебоксары: Центр научного сотрудничества «Интерактив плюс», 2023. – С. 9-20. – ISBN 978-5-6050720-7-2. – DOI 10.21661/r-560960.

5. А. Д. Мышкис Лекции по высшей Математике М., 1973, Издательство «Наука» Главная Редакция Физико-Математической Литературы Москва 1973.
6. Теоретическая физика в 10т. Том 1. Механика Ландау, Лифшиц 2004 224 ФИЗМАТЛИТ, 2001 — 2005.
7. Quantum Mechanics "Lectures "NSU "6th semester "Zelevinsky 2002 - Lectures on quantum mechanics
8. ЭНРИКО ФЕРМИ лекции в Чикагском университете Издательство Чикагского университета. Перевод с английского Х.Б. Мицкевича. Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика"Ижевск. II издание
9. Теоретическая Физика В 10т. Том 5. Статистическая Физика. Ч. 1 Ландау, Лифшиц 2002
10. Кубо Р. "Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме"5-484-00819-0 2007
11. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2023
12. Волонтерская сеть под названием ABC@home посвящен распределенному вычислительному проекту, который должен был составить полный список всех троек ABC, состоящих из целых чисел, состоящих максимум из 18 цифр. В 2011 году проект достиг этой цели, составив список из 14,482,065 троек. См. Известна 241 ABC-тройка «качества» q не ниже 1,4, которые часто называют «хорошими» ABC-тройками. <https://www.math.leidenuniv.nl/desmit/abc/index.php> по сост. на 11.05.2024
13. К.Айерлэнд, М.Роузен. Классическое введение в современную теорию чисел. М.:Мир, 1987,416 с.
14. F. Szidarovszky and S. Introduction to Matrix Theory With Applications to Business and Economics 2002
15. Математика для ВТУЗов, Специальные курсы, Мышкис А.Д., 197 1972 ISBN 9780828507271, 0828507279
16. А.И.Мальцев Основы линейной алгебры 1985
17. Shinichi Mochizuki. Mochizuki's proof of ABC conjecture. In Special issue on Inter-universal Teichmüller Theory, editor, Mochizuki's proof

of ABC conjecture Vol 57 No. 1/2, page 12. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 2021.

Ссылка на сайт с источником публикации: Сайт Союз СЦМ [www.emediator.ru](http://www.emediator.ru).

## 7 Дискуссии

В ходе доказательства ABC гипотезы математическими методами физические законы помогли в поиске подобно нити Ариадны.

Провести обсуждение можно на форуме Сообщество ВК Физика для менеджеров