

Научная монография

Теория чисел с позиции статистической физики

Простые числа, как метаязык Вселенной

Марат Авдыев



$$B_a^n \not\cong B_c^n \setminus B_b^n, n > 2$$
$$\nexists f : \{S_j\} \longrightarrow \{\dots S_i\}$$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Союз "Сибирский Центр медиации"
2025

’Теория чисел с позиции статистической физики’

Научная монография

’Теория чисел с позиции статистической
физики.

Простые числа, как метаязык Вселенной’

Марат Авдыев

15 июня 2025 г.

Союз ’Сибирский Центр медиации’

'Теория чисел с позиции статистической физики'

УДК 511, 515.16 530.1, 37.013

М. А. Авдыев. 'Монография Теория чисел с позиции статистической физики. Простые числа, как метаязык Вселенной.'

Издательство Союз Сибирский Центр медиации 2025 344 стр.

В 1637 году Пьер де Ферма написал на полях «Диофантовой арифметики», что он нашел воистину чудесное доказательство неразрешимости уравнения Диофанта $a^n + b^n = c^n$, где натуральное $n > 2$, но узкие поля книг не позволили ему привести полное доказательство. Сотни страниц были потрачены выдающимися математиками Западного мира на поиск доказательств, и научный поиск продолжается. Оказалось, что ключ к элементарному доказательству находился в физике. Гипотеза Римана о том, то все нетривиальные нули $\zeta(s)$ -функции расположены на мнимой оси $s = \frac{1}{2} + it$ является следствием корпускулярно-волнового дуализма. ABC-гипотеза, утверждающая, что для трёх взаимнопростых чисел, удовлетворяющих соотношению $a + b = c$, произведение простых делителей a, b и c обычно ненамного меньше c , решается средствами статфизики, равно как и проблема Гольдбаха-Эйлера о возможности представления чётного числа свыше двух в виде суммы двух простых чисел. В этой работе автор приводит методы доказательства, понятные школьникам и студентам, на основе синтеза ряда наук, включая физику. Сделано обобщение о роли простых чисел во Вселенной.

М. А. Avdyev. Monograph 'An introduction to number theory from the perspective of statistical physics. Prime numbers as the metalanguage of the universe.'

Publishing by Union Siberian Center of mediation 2025

In 1637, Pierre de Fermat wrote in the margins of Diophantine Arithmetic that he had discovered a remarkable proof of the unsolvability of the Diophantine equation $a^n + b^n = c^n$, where $n > 2$. However, the narrow margins of the book prevented him from providing a full proof. Prominent mathematicians in the Western world have spent hundreds of pages searching for proofs, and the scientific search continues. However, it has since emerged that the key to the elementary proof lies in the physics. The Riemann hypothesis, which concerns all nontrivial zeros of the $\zeta(s)$ - functions are located on the imaginary axis $s = \frac{1}{2} + it$ of the complex plane, is a consequence of particle-wave duality, symmetry. The ABC hypothesis, which states that for three coprime numbers satisfying the relation $a + b = c$, the product of the prime divisors a, b and c is usually not much less than c , is solved by means of statistical physics. The same is true of the Goldbach–Euler problem concerning the possibility of an even number greater than 2 being the sum of two prime numbers. In this monograph, the author provides proof methods that are understandable to schoolchildren and students, based on the synthesis of several sciences, including physics. The author also makes a generalization about the role of prime numbers in the universe.

(c) СЦМ

© Все авторские права защищены.

<https://emediator.ru>

Опубликовано: сентябрь 2024, май 2025 Союз 'Сибирский Центр медиации'

Оглавление

Оглавление	iii
Рецензия	viii
1 Рецензия на монографию	viii
Предисловие	x
2 Почему были выбраны головоломки теории чисел?	x
Preface	xii
3 Why were the number theory puzzles chosen?	xii
1 Именно с позиции Физики!	1
Теорема Ферма на школьном глобусе	4
2 Зачем школьнику ВТФ?	6
1 Введение	6
2 Формулировка теоремы	7
3 Человеческий разум против искусственного интеллекта	8
4 Мысленные эксперименты	9
5 Проект, моделирующий ВТФ	11
6 Симметрия. Изотропность и однородность пространства	12
7 Пифагоровы 3-ки $\exists$ только на 2D плоскости	17
8 Непрерывность. Гомеоморфизм. Классы эквивалентности	20
9 Сведения из теории множеств	21
10 Мощность множества и функция эквивалентности	22
11 Метрическая топология. Конструкция	24
12 Не пересекающиеся классы эквивалентности	26
13 Цепь множеств из n-кубов	27
14 Аксиомы Евклида в ХХI	32
15 Парадокс. К вершине гиперкуба!	34
16 Доказательство в одну формулу и чертёж	39
17 Гипотеза Леонарда Эйлера	40
18 Вывод	45
19 Дискуссии	48

Дзета-функция Римана	50
----------------------	----

3	Дзета-функция Римана	52
1	Введение	52
1.1	Бесконечность числа нетривиальных нулей	53
2	С позиции физики	58
2.1	Важные предпосылки	58
2.2	Фазовое пространство и энтропия	61
2.3	Статистический вес и плотность состояний	63
3	Алгебра и симметрия	68
3.1	Группы симметрии. Характеристики	72
4	Распределение Гиббса и Дзета-функция	77
4.1	Статсумма и статвес	79
4.2	Ортогональность, непроводимость и p -число	87
5	О квантовой природе p -чисел	90
6	ζ -функция есть $\otimes$ всех Z -сумм	97
6.1	Абелева группа и статматрица	101
6.2	Формула Планка	102
7	Заключение	105

Проблема Гольдбаха	108
--------------------	-----

4	Проблема Гольдбаха	110
1	Введение	110
2	Доказательство	112

АВС-гипотеза глазами физика	117
-----------------------------	-----

5	АВС-гипотеза: от эксперимента к теории	119
1	Введение	119
2	Ключевая идея доказательства	119
3	Инженерный подход. Конструкция	123
4	Основная теорема арифметики	124
5	Микросостояние и макросостояние системы	126
6	Фазовое пространство. Плотность распределения вероятности	127
7	Квантовая природа простых чисел	129
8	Теорема Лиувилля. Энтропия	129
9	Радикалы чисел a , b , c и фазовое пространство	133
10	Линейные пространства. Функции от матриц	137
11	Произвольные A , B , C и квантовая механика	147
12	Аналогии из систем ЛДУ	147
13	Флуктуации	150
14	Функции Чебышёва и энтропия	160

Fermat's Last Theorem on the school Globe	165
---	-----

6 Fermat's Last Theorem on the school Globe	167
1 Introduction	167
2 Discussed questions	167
3 Human mind vs Artificial Intelligence?	169
4 Mental experiments	169
5 Objections	171
6 Symmetry. Isotropy and homogeneity of space.	171
7 Why do Pythagorean triples only $\exists$ on the 2D?	174
8 Continuity. Homeomorphism. Equivalence classes	178
9 An understanding of Set Theory.	178
10 Cardinality of Set and Equivalence function	179
11 Metric topology	180
12 Pairwise disjoint equivalence classes	181
13 Chain of n-cubes	182
14 Euclid's Axioms in XXI	186
15 A paradox	188
16 Journey to the vertex of the n-cube	189
17 Proof in a single formula and drawing	192
18 The Leonard Euler hypothesis	193
19 Summing up	199

The Riemann hypothesis and statistical physics	200
--	-----

7 The Riemann hypothesis from the standpoint of statistical physics	202
1 Introduction	202
2 The Infinity of Non-Trivial Zeros	203
3 Statistical Weight and Density of States	209
4 Algebra and Symmetry	214
5 Symmetry. Groups. Characters	216
6 Partition function and statistical weight	219
7 Orthogonality. Separation. p-Number	223
8 Quantum Nature of p -Numbers theorem	229
9 RH for school	234

The Goldbach conjecture from the eye of physicist	237
---	-----

8 Goldbach-Euler conjecture from the eye of physicist	239
1 Holbach's conjecture	239
2 Proof	240

The ABC conjecture from the perspective of physics	244
--	-----

9 The ABC conjecture from the Eye of physicist	246
1 Formulations of ABC conjecture	246
2 The key idea of Prove	246
3 The Fundamental Theorem of Arithmetic	249
4 Microstate and macrostate of the system	251
5 Phase space. Probability distribution density	252
6 The quantum nature of prime numbers	253
7 Preservation of phase volume. Entropy	253
8 Radicals of the numbers A, B, C and phase space	256
9 Linear Spaces and Matrix Functions	261
10 Logarithm of the Matrix	264
11 Trace of matrices. Entropy	268
12 Arbitrary A, B, C and quantum mechanics	269
13 Analogies from ODE systems	270
14 Fluctuations	271
15 Prime numbers as the metalanguage of the Universe	281
16 The Riemann hypothesis and physics.	281
17 Summing up	282

Борьба с предубеждениями	284
--------------------------	-----

10 Борьба с предубеждениями	286
1 Введение	286
2 Цель социологического исследования	288
3 Популярная американская пресса vs РИНЦ	291
4 Мораль и наука	292
5 Общеизвестные, но ложные теории	293
6 Мораль стран Объединенного Запада	295
7 Метаязык Вселенной	300

Fighting prejudice	304
--------------------	-----

11 Fighting prejudice	306
1 Introduction	306
2 Purpose of the sociological research	307
3 Popular American Press vs RSCI	310
4 Morality and Science	310
5 Generally accepted but false theories	312
6 Protection of rights through the Constitutional and Supreme Courts . . .	314
7 In the interest of humanity and morality of Russia	314
8 The morality of the countries of the United West	319

9	Morality. Scientific objectivity	321
10	Scientific discoveries are of global importance	322
11	The response of the Constitutional Court	323
12	Don't invent entities beyond necessity	325
13	The Metalanguage of the Universe	325
14	Conclusion. Prime numbers as metalanguage of universe	325
Приложения		329
12	Приложение	331
1	Пространство Лебега, Гильберта. Операторы	331
1.1	Базис из линейно независимых функций	331
1.2	Функция Грина. Пропагатор	337
1.3	Интегральное уравнение Фредгольма	342
2	Статистическая матрица.	344
3	Каноническое распределение Гиббса	347
4	Вырождение энергетических уровней	350
Appendix		353
13	Appendix	355
1	The Canonical Gibbs Distribution	355
2	Degeneration of energy levels	357
3	Statistical matrix for arbitrary A, B and C	360
4	A group axiom for $\{\tilde{Z}(\beta)\}$	362
14	Послесловие. Afterword	365
1	Поиск истины тернист	365
2	The pursuit of veracity	366
Рецензия		369
3	Review of Monograph	369
Литература и др. источники		371
Об авторе		378

Рецензия

1 Рецензия на монографию

М.А. Авдыева «Теория чисел с позиции статистической физики. Простые числа как метаязык Вселенной. Простые числа как метаязык Вселенной»

Научная монография М.А. Авдыева «Теория чисел с позиции статистической физики. Простые числа как метаязык Вселенной. Простые числа как метаязык Вселенной» посвящена поиску кратких доказательства математических головоломок, вызвавших интерес у научного сообщества, школьников и студентов:

- ▶ ABC -гипотеза
- ▶ Гипотеза Римана
- ▶ Проблема Гольбаха-Эйлера
- ▶ Великая теореме Ферма.

Вопреки общепринятому в западной научной доктрине скепсису, они доказываются с позиции статистической физики, симметрии, опирающейся на общие принципы мироздания. Изложение сопровождается ссылками на программу общеобразовательной школы, что позволяет понять общие принципы доказательства для школьников средних и старших классов.

Тема имеет большой практический и теоретический интерес, поскольку в последние годы общество предъявляет особые требования к математическому образованию, информационным технологиям, синтезу точных и гуманитарных наук, а также вопросам реформирования школьного и вузовского образования, отвечающего вызовам, стоящим перед современным обществом. В Гл. 2 монографии, где излагается поиск доказательства Великой теореме Ферма (ВТФ), автором использованы знания преимущественно в рамках школьной программ классов с углублённой физико-математической подготовкой. Автор избегает использование знаний высшей математики, ориентируясь в первую очередь на широкую читательскую аудиторию. С этой же целью автором сделан перевод текста на английский язык в Гл. 7-9 и 11 монографии. Автор использует аналогии и 3D — моделирование, программный код для раскрытия аксиом математики и концепций фундаментальной физики, двигаясь от эксперимента к фундаментальным обобщениям. Решая поставленную педагогическую задачу, автор обращается и к другим школьным предметам: физике, архитектуре и черчению, землеведению, истории и изобразительному искусству для пояснения важных концепций, выпавших из поля зрения Западной науки, более ориентированной на компетентностный и узкоотраслевой походы. В результате читатель вслед за автором может проделать сложный путь научного поиска и взглянуть на привычные вещи с необычного ракурса. Это помогает в осмыслении конфликта формы и содержания, заложенного, по мнению автора, в

ВТФ. АВС-гипотеза, изложенная в Гл. 5 на русском и в Гл. 9 английском языках, соответственно, рассчитана на более подготовленного читателя, студентов 2-3 курсов технических вузов или школьных преподавателей предметов физики, математики. Но «ключевая идея» доказательства приведена в начале каждой из перечисленных глав монографии, и заключается эта идея в рассмотрении формулировки АВС-гипотезы с позиции эксперимента и случайных ошибок, неизбежных в каждом измерении, в основе которых покоится принцип неопределённости из квантовой механики.

Далее автор различает важные концепции связи и взаимодействия, обособленности, деления общего ресурса, рассматривая простые числа в качестве конструкта фазового пространства, прибегает к статистической матрице и энтропии, детально раскрывая её расчёт путём матричного логарифмирования и усреднения по хорошо известным принципам математической статистики, используемых и школьниками и студентами в лабораторных исследованиях при оценке погрешности измерений. Это наводит автора на нетрадиционный вывод о том, что показатель «качества тройки», используемый в формулировке АВС-гипотезы, в действительности является «дефектом» и результатом флуктуации - отклонения случайной величины от её математического ожидания. Как правило, показатель «качества тройки» не превышает единицы, а отклонения ограничены сверху случайной функцией, имеющей нормальное распределение, в соответствии с Законом больших чисел — основной вывод автора, доказывающий АВС-гипотезу, подкреплён детальными расчётами, численными оценками и программной симуляции. Для интерпретации найденного доказательства АВС-гипотезы, автор обращается также на I и II начала термодинамики, уравнение адиабаты и постоянства энтропии при работе идеальной машины Карно. Такой необычный синтез школьных знаний термодинамики, основ статистической физики и математической статистики, алгебры матриц и линейных операторов, широко используемых в квантовой механике, помогают автору сделать материал доступным для широкой читательской аудитории, объяснить основные концепции школьникам старших классов. Новизна авторского подхода заключается не только в раскрытии сложных понятий математических понятий простым языком (иногда в ущерб математической строгости), но в постоянном обращении к концепциям физики. Автор указывает на неразрывную связь эксперимента с «чистой математикой», с фундаментальной наукой. Это отличает монографию от «сухих» математических доказательств строго сформулированных, но увы, зачастую недоступных для понимания широкой аудиторией.

В Гл. 6 и 7 монографии автор приводит ряд интересных примеров предубеждений в науке, господства ложных научных теорий на определённых исторических периодах и раскрывает различия между дефинициями «общепризнанный» и «истинный». Общепризнанность не является критерием истинности — этот тезис автор раскрывает на примере конкретного кейса по защите прав результатов интеллектуальной деятельности, выявившего правовые лакуны в системе действующего нормативного регулирования, указывает на негативную практику экс-территориального применения права США, а точнее «негласных правил». Автор указывает на необходимость дальнейшей нормотворческой работы с учётом положительного опыта СССР в условиях навязанного экзистенциального конфликта нашей страны с элитами стран Объединённого

Запада. В этих же главах монографии рассматриваются философские вопросы о месте простых чисел в мироздании и содержит потенциал для дальнейшего исследований на стыке математики, физики, гносеологии. Монография хорошо структурирована, материал и ссылки на использованную литературу удобно отформатированы, наиболее сложные для понимания вопросы квантовой механики, статистической физики вынесены в приложения, прослеживается логическая связь между главами монографии и приложениями. Особенно удобны работающие гиперссылки на рисунки, таблицы, формулы и приложения в электронной версии. Автором использованы общенаучные термины. Монография состоит из введения, одиннадцати частей, двух приложений, послесловия, содержит список литературы около девяти десятков наименований. Монография рекомендуется для публикации в Научной электронной библиотеке и печати в составе научных изданий.



Рецензент: Крейк Альфред Иосифович к.с.н., доцент

15 мая 2025 г.

Предисловие

2 Почему были выбраны головоломки теории чисел?

Почему автор выбрал в качестве объекта исследования Великую теорему Ферма (ВТФ) и ABC-гипотезу, Гипотезу Римана о так называемых нетривиальных нулях ζ -функции и бинарную проблему Гольдбаха - Эйлера? - Все эти проблемы объединяет одно: очень простая формулировка, но чрезвычайно сложный поиск доказательства. Пожалуй, нет такого школьника, который не слышал бы о Великой теореме, справедливо относимой к математическим жемчужинам. Не меньший интерес представляет ABC-гипотеза, которая оказалась не настолько популярной среди широкой аудитории читателей, но также обросла своими легендами, прежде всего из-за беспрецедентно объемного доказательства талантливейшего математика из Токийского университета (свыше 500 страниц).

Изначально автору удалось доказать ВТФ с помощью высшей математики, анализа устойчивости гипотетической конструкции в виде трех вложенных гиперкубов. Оказалось, что любая малейшая флуктуация неизбежно приводит к уничтожению симметрии конструкции.

Это показалось очень странным, ведь материализм постулирует постоянное движение. В этом сложном виде автор пересказывал ВТФ перед разными аудиториями слушателей, включая студентов гуманитарного профиля, одновременно продолжая поиск простого доказательства путём создания учебных фильмов, 3D-моделирования, написания книги [Восхождение к вершине гиперкуба](#), заочно споря с апологетами про-американской версии доказательства. Их деструктивная критика, порою на условиях анонимности, также сыграли положительную роль в поиске простого, но одновременно математически строгого доказательства - оно приведено в Главе 2 книги.

Тем не менее краткая версия доказательства ВТФ - российская версия встретила прохладный приём адептов про-западной науки. Возникла новая проблема - отсутствие системы государственной регистрации научных открытий в России. Эта система была полностью уничтожена в период неоправданных ожиданий от органичной интеграции российской науки в общемировую - (читайте - в Западную), есть лишь одна официально признанная ста сорока страничная Американская версия доказательства ВТФ, и это - Истина в конечной инстанции!

В этой монографии изложены российские версии доказательства великих математических жемчужин. Они доступны пониманию широкой аудитории - школьникам старших классов. Это миллиарды людей на Земле. С этой целью в монографии - Главы. 2-6 и 10, а также приложения, переведены и на английский язык (Главы 7-9 и 11), остающийся [латынью XXI века](#). Вместе с тем экономика, торговля, финансы и технологии стремительно набирают темп в странах Азиатско-Тихоокеанского региона, а мир становится многополярным. Быть может, благодаря читательской поддержке и нейросетям, появятся переводы и на другие языки.

Автор убеждён, что «открытие по плечу» каждому школьнику, что искусственный интеллект должен служить человеку, усиливая его научный потенциал, а не становиться инструментом верификации доказательства и единственным критерием истинности (такая негативная тенденция прослеживается в Западной математике, ориентированной на поиск доказательств, доступных для понимания лишь узким кругом избранных авторитетов).

Современная школьная программа далека от сбалансированности, она перегружена разрозненными фактами, сведениями. Поиск наглядного, краткого доказательства ВТФ - это повод задуматься над [системностью](#) школьного образования, отвечающего нуждам XXI века в условиях острого противостояния России со странами объединённого Запада. Здесь идут в ход недобросовестные приёмы: лже-научные экспертизы, подмена обсуждаемого тезиса (проще говоря, демагогия), постоянно изменчивая позиция, анонимки, личные выпады, отказ от диалога и др. Здесь пригодился многолетний опыт Союза Сибирский Центр медиации по борьбе с «грязными приёмами» в конфликтах. Именно благодаря поддержке этой организации была создана данная монография.

Школьники изучают слоистое строение Земной коры, теорему Пифагора, скалярное произведение векторов, закон сохранения вещества при химических реакциях, конгруэнтность фигур, симметрию. Ряд базовых понятий из высшей математики, например,

понятие однородности, изотропности пространства преподают на уроках природоведения, труда и физики. С помощью принципов симметрии поддаются решению задачи, требующие в общем случае знания основ интегрирования и дифференцирования, умения решать системы дифференциальных уравнений в частных производных. Наконец, уроки черчения и астрономии, изучение памятников мирового культурного наследия, основ логики и философии — всё это поможет в поиске доказательства ВТФ с опорой на школьные знания. Налицо преимущества междисциплинарного подхода.

Автор убеждён, что излагаемая в данной публикации краткая версия ВТФ способствует концентрации внимания, стимулирует интерес к творческой учёбе у школьников и студентов. Но есть и более веская причина - борьба с предубеждением. И не случайно глава 6 книги посвящена борьбе с ошибочными предубеждениями в науке. С этих позиций Великая головоломка может рассматриваться как индикатор суверенизации российской науки. Закономерно враждебное отношение апологетов Западных стран к такому доказательству, поскольку оно оспаривает господствующие стереотипы о лидерских позициях США в точных науках. Об этом будет рассказано в главе 6.

Помимо цитат ниже в тексте **курсивом** либо цветом отмечены научные термины, значение которых подробно раскрыто в списке прилагаемой литературы и на специализированных сайтах, форумах, посвященных точным наукам.

Preface

3 Why were the number theory puzzles chosen?

Why did the author choose Fermat's Last Theorem (FLT) and the ABC hypothesis, the Riemann hypothesis about the so-called nontrivial zeros of the ζ function and the binary Goldbach-Euler problem as the object of research? - All these problems have one thing in common: a very simple formulation, but an extremely difficult search for proof.

It is also noteworthy that the ABC conjecture has not gained widespread acceptance among the general public, despite the impressive proof presented by the renowned mathematician from the University of Tokyo.

The author initially demonstrated the validity of FLT through the application of advanced mathematical techniques, specifically by analysing the stability of a hypothetical structure comprising three nested hypercubes. It was demonstrated that the slightest fluctuation inevitably results in the destruction of the structure's symmetry. In this intricate form, the author recounted the FLT to diverse audiences, including those of a humanistic inclination, while persisting in his pursuit of a straightforward proof through the creation of educational films, 3D modelling, and the authorship of a book entitled "Climbing to the Top of the Hypercube". Additionally, he engaged in absentia with proponents of the pro-American interpretation of the proof, offering arguments in response to their criticisms. The destructive criticism, which was sometimes expressed anonymously, also had a positive

impact on the search for a simple yet mathematically rigorous proof, which is presented in Chapter 2 of the book.

Nevertheless, the author's version of the FLT proof – the Russian one – was met with a lukewarm response from those who adhere to pro-Western science. A new issue emerged: the absence of a system for registering scientific discoveries at the state level in Russia. This system was entirely dismantled during the period of unwarranted expectations regarding the integration of Russian science into the global scientific community (that is to say, the Western scientific community).

It would appear that a definitive proof of the FLT does not exist. This may be due to a lack of understanding of the subject matter, as there is only one officially recognised version of the FLT proof, which is a 140-page American text.

This monograph presents Russian versions of the proof of the great mathematical gems. They are accessible to a wide audience of high school students. There are billions of people on Earth. For this purpose, the monograph contains Chapters 2-6 and 10, as well as appendices, have also been translated into English (Chapters 7-9 and 11), remaining *Latin of the 21st century*. This equates to a global population of billions. For this purpose, the monograph, specifically Chapters 4 and 5, has been translated into English. The term "21st-century Latin" is used to describe a particular style of writing that emerged in the early 21st century. Concurrently, the economies, trade, finance and technology of the countries in the Asia-Pacific region are experiencing accelerated growth, and the world is becoming multipolar. It is hoped that, thanks to the reader's support and the use of technology for the preparation of scientific texts, translations into other languages will appear.

The author is convinced that every student has the potential to make a significant discovery. Furthermore, the advancement of artificial intelligence should be directed towards enhancing human capabilities, rather than solely focusing on verifying evidence and establishing a singular criterion for truth. This approach is evident in Western mathematics, where the emphasis is on the pursuit of evidence that is limited to a select group of experts.

The contemporary school curriculum is, in the view of many, unbalanced and overloaded with disparate facts and information. The search for a clear and concise proof of the fundamental theorem of calculus provides an opportunity to reflect on the consistency of school education that meets the needs of the 21st century.

The preparation of this monograph was made possible by the Siberian Centre of Mediation, the Union and the support of this organisation.

The curriculum includes the study of the layered structure of the Earth's crust, the Pythagorean theorem, the scalar product of vectors, the law of conservation of matter in chemical reactions, congruence of shapes, and symmetry. A number of fundamental concepts from advanced mathematics, such as the notion of uniformity and the isotropy of space, are introduced in the natural science, labour and physics lessons. The application of symmetry principles enables the resolution of problems that typically necessitate an understanding of fundamental integration and differentiation concepts, as well as the

capacity to solve systems of partial differential equations. In conclusion, the curriculum includes lessons in drawing and astronomy, the study of monuments of world cultural heritage, and the basics of logic and philosophy. These will assist students in searching for evidence of the FLT based on their school knowledge. It is evident that an interdisciplinary approach offers significant advantages.

It is this author's conviction that the concise exposition of FLT presented in this publication will foster concentration, stimulate interest in creative learning among schoolchildren and students. However, there is a more compelling rationale for this approach, namely the fight against prejudice. It is noteworthy that chapter 6 of the book is devoted to the fight against erroneous biases in science.

In addition to the quotations below, scientific terms are marked in the text *colored* in italics or in color, the meaning of which is disclosed in detail in the list of attached literature and on specialized websites and forums dedicated to exact sciences.

Список таблиц

6.1 Любая сфера из прообраза отображается в образ отдельно по каждому элементу.	15
7.2 Симметричность в четырёхмерном пространстве $n = 4$	20
13.3 Биномиальные коэффициенты	29
14.4 Постулаты Евклида в дискретном пространстве	32
7.1 Непротиворечивая алгебра. Гомоморфизм	106
2.1 Гомоморфизм алгебр	120
6.1 Any spheres from preimage can be mapped into image <u>by each element separately</u>	173
7.2 Symmetry in four-dimensional space $n = 4$	176
13.3 Binomial coefficients	184
14.4 The postulates of Euclid in discrete space	186
2.1 The general rule of homomorphism over algebras.	249
14.1 Mathematics model. Algebra.	326

Можно значительно упростить доказательство теоремы и сократить объём искомого решения за счёт применения ряда физических принципов:

- ▶ Изотропность и однородность пространства;
- ▶ Выявление повторяемых структур и симметрии;
- ▶ Механическая аналогия и эвристический поиск;
- ▶ Применение принципа подобия объектов;
- ▶ Выбор надлежащей системы координат и форм фигур, адекватных исследуемым объектам;
- ▶ Мысленный эксперимент.

Скептики продолжают считать, что Пьер де Ферма, вероятнее всего, заблуждался. Между тем, последовательное применение основных принципов физики, геометрии заставляют думать иначе. Работа над теоремой Ферма придала импульс развитию теории чисел, которая также описывает законы физического мира, но опосредовано. Смена парадигмы позволяет увидеть эту связь в наглядном представлении. Драматическая история открытия теоремы Ферма и поиск наглядных доказательств должны стать частью школьной / вузовской подготовки. Продолжает тему теории чисел в этой монографии ABC-гипотеза (ABC conjecture). Она также доказана, прежде всего, с позиции физики, что позволяет значительно упростить изложение и не потерять главную идею доказательства: простые числа связывают макромир с микромиром, который в свою очередь, подчиняется законам квантовой физики. Развитие этого подхода оказалось плодотворным при поисках доказательства гипотезы Римана о расположении так называемых нетривиальных нулей ζ -функции на оси $s = \frac{1}{2} + it$ является следствием корпускулярно-волнового дуализма, симметрии и возможности отображения между двумя алгебраическими системами, которое переносит множество элементов одной системы в другую (простые числа), сохраняя все операции и отношения.

Бинарная проблема Гольдбаха -Эйлера о том, что каждое целое четное больше двух раскладывается на сумму двух простых чисел, имеет очевидную связь со статистической суммой, с преобразованиями Фурье и равенством Парсеваля - Стеклова.

В основе всех перечисленных доказательств лежат принципы симметрии и асимметрии, возможность выделения частного из целого и понимание тонкой грани между связью и взаимодействием. Обычно эти вопросы рассматриваются с использованием сложного математического аппарата и физики. Но в наш век почти каждого человека на Земле окружают устройства, где используются названные принципы, а школьная программа уже привычно оперирует такими понятиями как лазер, квантовый компьютер. Становится привычным дистанционное взаимодействие с государственными

органами и банками с помощью квалифицированной электронной подписи, финансовые транзакции уже сейчас защищаются с помощью квантовой криптографии и т.д.. И поэтому рискнём изложить материал языком, доступным для самой широкой аудитории.

Для удобства понимания материал разбит на главы (секции) в отличном от хронологического порядка поиска доказательств. Изложение сопровождается ссылками на программу общеобразовательной школы.

It is possible to significantly simplify the proof of the theorem and reduce the amount of the desired solution by applying a number of physical principles:

- ▶ Isotropy and uniformity of space;
- ▶ Identification of repeatable structures and symmetries;
- ▶ Mechanical analogy and heuristic search;
- ▶ Application of the principle of similarity of objects;
- ▶ Selection of the appropriate coordinate system and shapes of shapes adequate to the objects under study;
- ▶ is a thought experiment.

It is the position of this author that the aforementioned Pierre de Fermat was erroneous in his conclusions. Conversely, consistent application of the fundamental principles of physics and geometry engenders a shift in cognitive processes. The endeavours undertaken in the pursuit of Fermat's theorem served as a catalyst for the advancement of number theory, a field which, albeit indirectly, also elucidates the laws that govern the physical world. The paradigm shift facilitates the visualisation of this connection. It is submitted that the dramatic story of the discovery of Fermat's theorem and the subsequent search for visual proofs should form part of the school and university curriculum. The ABC hypothesis is an extension of the theme of number theory in this monograph. Evidence has been presented which demonstrates the validity of the proposition from a physical perspective. This allows for a significant simplification of the presentation without compromising the core idea of the proof. The argument posits that prime numbers serve as a bridge between the macrocosm and the microcosm, with the latter being subject to the laws of quantum physics.

The development of this approach proved fruitful in the search for a proof of the Riemann hypothesis about the location of the so-called nontrivial zeros ζ -functions on the axis $s = \frac{1}{2} + it$ is a consequence of wave-particle dualism, symmetry and the possibility of mapping between two algebraic systems, which transfers a set of elements from one system to another (simple numbers), preserving all operations and relationships.

The binary Goldbach-Euler problem, which states that every integer greater than two can be decomposed into the sum of two primes, has an evident connection with the statistical sum, Fourier transforms and the Parseval-Steklov equality.

The foundation of these proofs is predicated on the principles of symmetry and asymmetry, the possibility of separating the particular from the whole, and an understanding of the fine

line between connection and interaction. Questions of this nature are typically addressed through the utilisation of sophisticated mathematical apparatus and physical principles. However, in the current era, the vast majority of the global population is surrounded by devices that utilise these principles, and the school curriculum has already incorporated concepts such as lasers and quantum computers. The utilisation of qualified electronic signatures for remote interaction with government agencies and banking institutions is becoming increasingly prevalent. Financial transactions are already protected using quantum cryptography, among other methods. Consequently, we will endeavour to present the material in a language accessible to the widest possible audience.

In order to facilitate comprehension, the material has been organised into chapters (sections) that are not arranged in the same chronological order as the search for evidence. The presentation is accompanied by references to the general education school curriculum.

Теорема Ферма на школьном глобусе

1	Введение	6
2	Формулировка теоремы	7
3	Человеческий разум против искусственного интеллекта	8
4	Мысленные эксперименты	9
5	Проект, моделирующий ВТФ	11
6	Симметрия. Изотропность и однородность пространства	12
7	Пифагоровы 3-ки $\exists$ только на 2D плоскости	17
8	Непрерывность. Гомеоморфизм. Классы эквивалентности	20
9	Сведения из теории множеств	21
10	Мощность множества и функция эквивалентности	22
11	Метрическая топология. Конструкция	24
12	Не пересекающиеся классы эквивалентности	26
13	Цепь множеств из n -кубов	27
14	Аксиомы Евклида в XXI	32
15	Парадокс. К вершине гиперкуба!	34
16	Доказательство в одну формулу и чертёж	39
17	Гипотеза Леонарда Эйлера	40
18	Вывод	45
19	Дискуссии	48

1 Введение

Почти четыре столетия мир бился над решением Великой теоремы Ферма. Есть доказательство сотню с лишним страниц для специалистов в теории чисел, но его невозможно пересказать. Попробуем рассмотреть теорему Ферма с позиции физики и геометрии. Именно с этих позиций Пьер де Ферма мог найти решение, основные идеи которого схематично уместились бы на достаточно широких полях книги, в нескольких рисунках. Однако господствующие на протяжении столетий в математике парадигмы оказали сильное препятствие в нахождении решения в том направлении, которое, выражаясь современным языком, является эффективным. Скептики продолжают считать, что Пьер де Ферма, вероятнее всего, заблуждался. Между тем, последовательное применение основных принципов физики, геометрии, мысленного эксперимента заставляют думать иначе. История открытия теоремы Ферма должна стать частью школьной / вузовской подготовки. В самом деле, суть доказательства укладывается в одной формуле и одном рисунке.

Важно отметить, что наряду с Великой теоремой Ферма существует также Малая теорема Ферма в теории чисел.

Здесь речь идет только Великой теоремой Ферма
(Fermat's Last Theorem).

Почему шар и куб гомеоморфны? И что такое гомеоморфизм? Какую роль играют однородность и изотропность пространства, симметрия в поисках математического доказательства? Почему в Великой теореме Ферма возникает фатальный конфликт между формой и содержанием? Обсудив эти вопросы, мы сделаем обобщения и выводы о фундаментальных свойствах нашей Вселенной.

В данной публикации приведено доказательство Великой теоремы Ферма (ВТФ) без математического формализма.

Автор приводит версию краткого доказательства ВТФ с опорой преимущественно на школьные знания физики, информатики и др. школьных предметов. С позиции инженерного подхода понимание основ теории множеств и аксиом Евклида можно проиллюстрировать с помощью 3D- моделирования, конструирования и обобщить результаты на многомерное пространство.

2 Формулировка теоремы

Великая теорема Ферма была сформулирована Пьером де Ферма в 1637 г. Она утверждает, что следующее Диофантово уравнение:

$$a^n + b^n = c^n \quad (2.1)$$

не имеет решений в целых числах $\mathbb{Z}$, за исключением нулевых значений, для $n > 2$. Случай степени $n = 2$ известен в школьном курсе под названием теорема Пифагора. Эйлер в 1770 году доказал теорему (2.1) для $n=3$, Дирихле и Лежандр в 1825 году - для $n = 5$, Ламе - для $n = 7$. В 1994 году профессор Принстонского университета Эндрю Уайлс [Wil95], [BG94] доказал (2.1) для всех n , но это доказательство, содержащее более ста страниц, понятно математикам, специализирующимся в области теории чисел и цилиндрических функций. Возникает проблема верификации доказательства американской версии.

К числу Диофантовых уравнений относятся Великая теорема Ферма и теорема Пифагора. В 1900 г. немецкий математик Давид Гильберт сформулировал список из 23 математических задач, II Международном конгрессе математиков в Париже, включая Десятую проблему, которую в нескольких словах можно выразить так: «Пусть задано Диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых, рациональных числах.» Спустя 170 лет Советский математик Юрий Владимирович Матиясевич доказал, что общего алгоритма не существует [Mat70] см. также популярную публикацию в журнале "Квант" [Mat93] Тем не менее, для некоторых случаев, по-

[Wil95]: Wiles (1995), «Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem»

[BG94]: Boston и др. (1994), «The World's Most Famous Math Problem (The Proof of Fermat's Last Theorem and Other Mathematical Mysteries)» By Marilyn vos Savant»

[Mat70]: Матиясевич (1970), «Диофантовость перечислимых множеств»

[Mat93]: Матиясевич (1993), «Десятая проблема Гильберта»

[MA20]: М.А. (2020), «Теорема Ферма с позиции физики в школе»

[Дио07]: Диофант (2007), Арифметика и книга о многоугольных числах

[Эдв80]: Эдвардс (1980), Последняя теорема Ферма

[Син00]: Сингх (2000), Великая теорема Ферма

[Риб03]: Рибенбойм (2003), Последняя теорема Ферма для любителей

[Har17]: Hartnett (2017), «Mathematicians Explore Mirror Link between Two Geometric Worlds»

нять разрешимо ли Диофантово уравнение, могут школьники, не прибегая к вычислениям, опираясь на методы геометрической алгебры, симметрию, аналогию и фундаментальные свойства многомерного пространства, см. [MA20].

ВТФ сформулирована Пьером де Ферма на полях книги Арифметика Диофанта Александрийского (III НЭ) [Дио07]. Пьер де Ферма написал на узких полях книги, что отыскал воистину чудесное доказательство, но узкие поля не позволяют ему привести доказательство в полном объеме. Впоследствии потомки оболгали французского математика, и посчитали что он допустил легковесное суждение, проще говоря, хвастал и лгал. Основанием для такого утверждения стало канонизированное доказательство Эндрю Уайлса, на сто с лишним страниц, за что ему была присуждена престижная Абелевская премия в 2016г. Впоследствии Эндрю Уайлс стал деканом математический факультета Принстонского университета, входящего в Лигу Плюща. Но научный поиск нельзя остановить даже после раздачи самых престижных наград, а дисгармония между краткой формулировкой [Эдв80] и сложным доказательством ВТФ лишь подзадоривает [Син00] дерзких исследований. - Почему бы и не доказать проще? [Риб03] Истина - это процесс, а не финал.

3 Человеческий разум против искусственного интеллекта

Существуют ли короткие и простые способы доказательства Великой теоремы Ферма? Нужно ли для этого тратить сто или более страниц и прибегать к помощи искусственного интеллекта? Российские краткие версии доказательств обеих теорем в теории чисел основаны на "другом подходе о котором пишет Миньён Ким (Minhyong Kim), математик из Оксфордского университета, считает: [Использовать идеи физиков для решения задач теории чисел можно, но мы еще недостаточно хорошо продумали, как создать такую основу \[Har17\]](#). И еще одна его цитата: [Мы находимся в точке, когда наше понимание физики достаточно зрело, и есть достаточно теоретиков чисел, заинтересованных в ней, чтобы сделать толчок \(там же\)](#).

Автор придерживается принципа просто о сложном, продолжая традиции отечественных учёных в теории чисел, например в [Хин23].

Ответ на вопрос, существует ли быстрый и простой способ доказательства Великой теоремы Ферма утвердительный. И этот способ включает в себя серию мысленных экспериментов, а также философское осмысление основ нашего мироздания.

Рассмотрим конструкцию из трех concentрических вложенных n -кубов или шаров с центрами в начале координат, рёбр или радиусы которых равны натуральным числам a, b, c . Заметим, не меняя общности, что натуральные числа в формуле (2.1) связаны как $a < b < c$, а ситуация равенства ребер $a = b$ исключена в силу иррациональности $\sqrt[n]{2}$. Случай отрицательных чисел можно рассмотреть путём переноса члена в другую часть уравнения (2.1) и замены переменных - достаточно доказать теорему для случая $a, b, c \in \mathbb{N}_1$ (индекс 1 обозначает множество натуральных чисел, исключая ноль, в отличие $\mathbb{N}_0$ в эпоху цифры, где те же массивы в ряде программных языков нумеруются с нуля) и обобщить результат на целые числа $\mathbb{Z}$.

4 Мысленные эксперименты

Мысленный эксперимент - это гипотетическая ситуация, используемая для объяснения явления, через которые можно было бы получить результаты, если бы эксперимент действительно состоялся. Это ресурс воображения, обладающий достаточной логикой, чтобы можно было представить себе связные результаты.

Попробуем создать на основе ВТФ некоторую конструкцию. Рассмотрим проект состоящий из трёх вложенных центрированных n -кубов (шаров), a -Малый, b -Средний и c -Большой, общий центр которых совпадает с началом координат с рёбрами (радиусами) $a, b, c \in \mathbb{N}_1$, при условии следующего соотношения между объёмами фигур: $V(B_a^n) = V(B_c^n) - V(B_b^n)$. V — это обозначение объёма. Заметим, что для $n > 3$ вместо объёма следует использовать меру, определенную ниже.

[Хин23]: Хинчин (2023), Три жемчужины теории чисел



Рис. 3.1:

Пьер де Ферма 1607-1665 .

Главной заслугой Ферма по праву считается создание теории чисел. Ферма широко известен благодаря Великой теореме Ферма. Теорема была сформулирована им в 1637 году, на полях книги «Арифметика» Диофанта с припиской: я нашёл чудесное доказательство этой теоремы, но поля книги слишком узки, чтобы изложить его.

[Вир10]: Виро О Я Иванов О А (2010), Элементарная топология

Аддитивность (от лат. *additivus* — прибавляемый) — свойство величины, состоящее в том, что её значение, соответствующее целому объекту, равно сумме её значений, соответствующих частям объекта при любом разбиении его на части.

Заметим, что любой куб можно путем непрерывных и обратимых деформаций (**гомеоморфизм**) превратить в шар и наоборот [Вир10] - Гл. 2 § 10, 4. В топологии такие фигуры называют **гомеоморфными**. Поэтому ниже изложение переходит от n -куба к многомерному шару (в математике принято обозначение B_a^n где a — радиус шара, n — размерность пространства) тогда, когда это позволяет упростить изложение.

Помним, что для $n > 3$ вместо объёма следует использовать аксиоматически определяемое понятие меры, важным свойством которого является положительность значений и аддитивность, т. е. при объединении фигур их меры складываются, что не просто удобно для физических измерений массы, длины, площади, объёма, но и выражает свойство материи нашего мира (например, закон сохранения количества вещества в ходе движения и при химических реакциях).

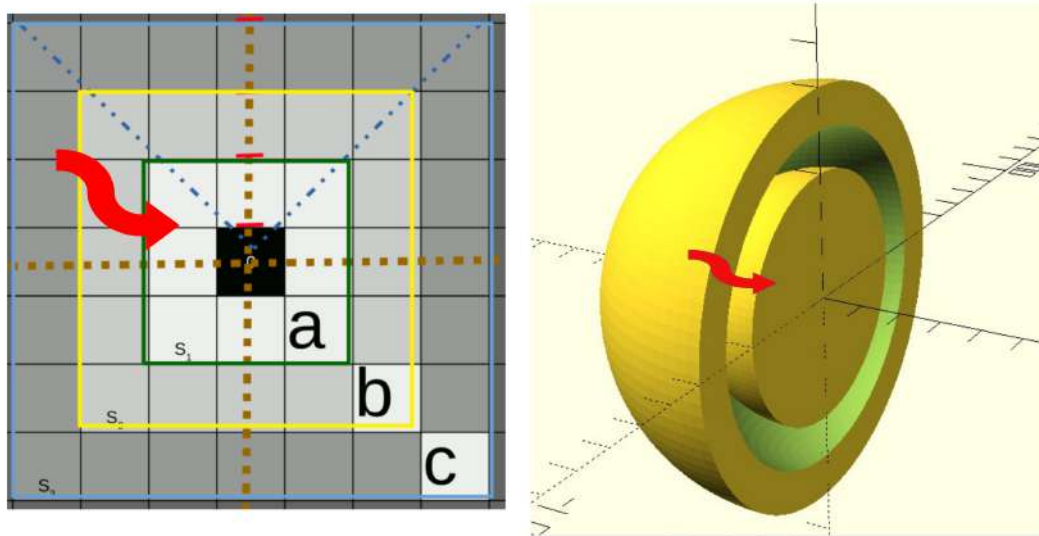


Рис. 4.2: Слева - концентрические n -кубы и справа - шары с целочисленными рёбрами / радиусами a , b , c

Мы получили конструкцию, не существующую в природе для случая $n > 2$, это удивительно! Несложно убедиться в неосуществимости рассматриваемого инженерного проекта.

Definition 4.1 Имя Евклида в XXI веке. В современном понимании под евклидовым пространством подразумевается один из сходных и тесно связанных объектов:

конечномерное вещественное векторное пространство с введённым на нём положительно определённым скалярным произведением либо метрическое пространство, соответствующее такому векторному пространству.

В самом деле, если конструкция на Рис. 4.2 существует, что обозначается квантором $\exists$, то в силу постулируемой однородности евклидова пространства можно переместить, как это символизируют стрелки на Рис. 4.2, поменять местами, сопоставить $\forall$ - любую точку / единичный куб из малого шара в соответствие другой точке / единичному кубу исследуемого подмножества пространства между средним и большим шарами так, чтобы не разрушить симметрию конструкции, не допустить неоднородностей либо пустот. Но эти подмножества (проще говоря части конструкции) не эквивалентны, а их объёмы (меры) не будут равны: $V(B_a^n) \neq V(B_c^n) - V(B_b^n)$. Или на языке теории множеств $B_a^n \not\equiv (B_c^n) \setminus V(B_b^n)$, где знак $\setminus$ означает вычитание множеств, а знак $\equiv$ - гомеоморфизм, о котором еще будет сказано ниже.

Теория множеств - через 3D моделирование

На Рис. 4.2 справа использовано кросс-платформенное приложение [OpenScad](#), которое помимо чисто инженерных приложений является прекрасным инструментом для изучения теории множеств, операций над множествами, ассоциативного закона [Кин]. Самый обычный металлический молоток на деревянной ручке можно рассматривать как результат операций вычитаний над множествами difference, объединения - union, пересечение intersection ручки и собственно металлической части молотка. Учебных примеров кода программ предостаточно для наглядной изложения понятий множество, подмножество, универсальное множество U , пустое множество $\emptyset$, дополнение множества и т.д.. Не пора ли в XXI веке изучать в школе основы теории множеств через 3D моделирование?

[Кин]: Кинтел (), OpenSCAD - это программа для создания твердотельных 3D-моделей САПР. Это свободное программное обеспечение распространяется под лицензией GPL работает под операционными системами Linux / UNIX, Windows и Mac OS X

5 Проект, моделирующий ВТФ

Можно ли построить конструкцию в виде трёх концентрических (гипер)кубов, моделирующий ВТФ? Допустим

по заказу "капризной рок-звезды" необходимо построить дом из трёх кубических комнат: студии, охватывающей её кофейни, охватывающего кофейню зимнего сада, да так чтобы объём студии был равен объёму пространства между зимним садом и кофейней в целых кубометрах, литрах, кубических дюймах и т.д.? - Как будет доказано ниже, этот проект неосуществим в любых единицах измерения длины ребра комнат и объёма пространства комнат - одно из рёбер трёх перечисленных комнат обязательно должно быть иррациональным числом.

Препятствие заключается в том, что фигура, моделируемая формулой (2.1) должна обладать свойством центральной симметрии и не может содержать неоднородностей. Эти ограничения приводят к тому, что в результате каждый слой на Рис. 4.2 не сопоставим ни с каким другим слоем в пространстве размерностью $n > 2$. Свойство аддитивности и аксиома меры здесь не применимы — неправомерна сама постановка вопроса о послойном сравнении. С другой стороны возможность послойного сравнения слоёв требует симметрия конструкции, допускающая сложение / вычитание / сокращение мер (объёмов для 3D-случая, площадей для случая 2D, длин для случая 1D)

Сложение / вычитание / сокращение мер - именно такие операции допустимы в однородном материале. Однородность евклидова пространства постулируется

Математики Древней Греции ввели понятие **несоизмеримости** линейных отрезков, как например $\sqrt{2}$ и 1. Здесь мы столкнемся с подобным, но и одновременно новым явлением. Убедимся, что преследуя условие равенства объёмов подмножеств исследуемой конструкции $V(B_a^n) = V(B_c^n) - V(B_b^n)$ и центральной симметрии взаимно исключают друг друга. В общем случае эти подмножества не эквивалентны. В этом и заключается основная идея доказательства.

6 Симметрия. Изотропность и однородность пространства

Будем различать открытый шар и охватывающую его сферу. Сфера является так называемым **слоем** для **замкнутого** им/ею шара или n-куба. Сфера имеет размерность на единицу меньше, чем шар. Эти утверждения известны из школьных уроков математики. Вспомните формулы для длины окружности $2\pi R$ и площади круга

πR^2 , площади сферы $\frac{4}{3}\pi R^3$ и объема шара. Интересно представить, что в одномерном мире мы получили бы открытый шар в виде отрезка, исключая его конечные точки, или нульмерные сферы, расположенные на расстоянии r от начала координат. Ниже показана сферы для 3D, 2D шаров - такие многообразия имеют размерность на единицу меньше, чем замыкаемые ими фигуры. Не случайно здесь стоит знак **гомеоморфизма** $\cong$ фигур.

Представим себе, что мы рассекаем нашу n -мерную сферу гиперплоскостями, начиная с простого случая четырехмерного пространства. Что мы увидим? - Трехмерную сферу с центром в начале координат, как результат пересечения четырехмерной сферы с трехмерным **подпространством** $\mathbb{R}^3$. Различаются **открытые** Северное и Южное полушария, при этом экватор исключается. Экватор становится меридианом, если повернуть фигуру под прямым углом. Для 3D случая получим обычный шар, напоминающий футбольный мяч, замкнутый 2D сферой или окружностью. Исключаем из сферы произвольный меридиан.



Рис. 6.3: Размерности полусфер и гиперплоскостей

Далее, для случая двумерной плоскости, открытой сферой становится привычный круг, исключая окружность. Наконец - открытый отрезок, исключая конечные точки.

Definition 6.1 В результате получится последовательность не пересекающихся геометрических элементов на сфере ряда размерностей от 1 до $n-1$. Это так называемые **гипермеридианы**, которые пригодятся нам в дальнейшем.

’ Теперь представим себе каскад непрерывно следующих сфер и меридианов, охватывающий каждую из этого мно-

жества. Допустим, что отыскалась $\exists$ - тройка натуральных чисел a, b, c , удовлетворяющих (2.1), тогда в этом случае каждая точка пространства в интервале между средней и большой сферами отобразится в малую сферу $k \int_b^c r^{n-1} dr = k \int_0^a r^{n-1} dr$, где k - некоторый коэффициент, зависящий от размерности пространства n . В силу симметрии конструкции любое множество этих сфер может быть отображено в множество других сфер меньшего радиуса, число малых сфер, очевидно, должно быть больше в силу условия равенства мер.

При объяснении интеграла преподаватели часто оперируют понятиями разбиения фигуры, шара B_r^n на отдельные части или дифференциала $S_r^{n-1} \Delta n$, (здесь $\Delta n = 1$) как при разрезании лимона, которые затем собираются в единое целое. Но применение высшей математики здесь будет излишним. Вместо записи интегралов для послойного сравнения множества сфер достаточно записать приведенное здесь уравнение в терминах теории множеств и отношений эквивалентности. Заметим, что $S^m \setminus S^{m-1} \cong \mathbb{R}^m$, $\dim(S^m \setminus S^{m-1}) = m$, где $\mathbb{R}^m$ - размерность пространства m , что наглядно следует из. Рис. 6.3, который можно интерпретировать как отслеживание траектории луча света, испущенного из точечного источника. Очевидно взаимно однозначное отображение точки в точку в образе и прообразе.

$$\{S_j\} \mapsto \{...S_i\} \quad (6.1)$$

это означает, что множество из одного элемента, содержащее единственный слой S_j , отображается на множество слоёв, содержащего несколько элементов S_i с помощью функции эквивалентности, при этом точка отображается в точку, элементарный куб - в элементарный куб: $1^n \mapsto 1^n$. Другими словами, существует некоторая функция эквивалентности $f(X) \rightarrow Y$, отображающая открытое множество X на множество Y . В отношениях эквивалентности каждый образ имеет прообраз.

В нашей конструкции множество непрерывно следующих друг за другом сфер с целочисленными радиусами, образуют открытые шары.

В начальной школе изучается текстура спиленного дерева, слоистая структура земной коры в разрезе, следы слоев на зонде, извлеченном из сверхглубокой скважины - всё это примеры **индуцированной топологии**.

Великая теорема Ферма исключает существование такой симметричной конструкции при соблюдении условий эквивалентности и непрерывности. Почему? Чтобы понять этот феномен, необходимо проанализировать уравнение (6.1) по элементам:

Таблица 6.1: Любая сфера из прообраза отображается в образ отдельно по каждому элементу.

n-1 Сфера	S^{n-2} -гипермеридиан	...	Элемент S^2 -сфера	S^1 -окруж.	Радиус
S_j^{n-1}	$S_j^{n-2} \setminus S_j^{n-3}$	...	$S_j^2 \setminus S_j^1$	$S_j^1 \setminus S_j^0$	j
$\downarrow$	$\downarrow$	...	$\downarrow$	$\downarrow$	...
S_i^{n-1}	$S_i^{n-2} \setminus S_i^{n-3}$	...	$S_i^2 \setminus S_i^1$	$S_i^1 \setminus S_i^0$	i
S_{i-1}^{n-1}	$S_{i-1}^{n-2} \setminus S_{i-1}^{n-3}$	...	$S_{i-1}^2 \setminus S_{i-1}^1$	$S_{i-1}^1 \setminus S_{i-1}^0$	i-1
...	...	...	...	...	...

Каждый слой содержит элементы размерностью от 1 до n-1. Здесь исследуемая структура заполнялась слоями от периферии j... i, (i-1) к центру, поэтому индексы перечислены в порядке убывания. Функция эквивалентности сопоставляет каждый элемент слоя S_j в отдельности с множеством элементов соответствующей размерности. При этом в силу симметрии из любого элемента слоя гипермеридиан более низкой размерности может быть выбран произвольно, подобно тому, как произвольно выбирается грань / ребро куба.

Обеспечить одновременное соответствие элементов слоя более чем по одной размерности невозможно из-за неразрешимости для $n > 2$ сформулированной ниже системы из n-1 уравнений, где i и j - натуральные радиусы концентрических сфер:

$$\begin{cases} j^{n-1} = i^{n-1} + (i-1)^{n-1} + \dots \\ \dots \\ j^2 = i^2 + (i-1)^2 + \dots \\ j = i + (i-1) + \dots \end{cases} \quad (6.2)$$

Каждое уравнение содержит два и более слагаемых справа. Этот ряд уравнений продолжается от n-1 до степени 1. Любой элемент произвольной размерности может быть

[Тре01]: Трельфалль (2001), Топология. Зейферт Г Трельфалль В

отображен функцией эквивалентности только на элемент той же размерности [Тре01]. Структура слоев определяется только размерностью пространства и не зависит от геометрического размера слоя.

Условие эквивалентности или равенства объёмов (точнее **мощности** множества точек для любого n -мерного пространства) отображаемых слоев означает, что любой произвольный слой большой сферы может быть отображен на множество последовательно следующих малых сфер.

Число слоев в **образе** в правой части каждого уравнения ≥ 2 , поскольку 2 - натуральное число, следующее за 1. Это приводит к системе уравнений, которая неразрешима даже в вещественных числах $\mathbb{R}$. Это можно проверить с помощью **неравенства треугольника** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для евклидова пространства, где сумма длин катетов прямоугольного треугольника больше длины гипотенузы. Случай равенства наступает только при нулевом катете и исключается по условиям Великой теоремы Ферма.

В силу ассоциативного закона

При числе членов в системе уравнений 6.2 больше двух можно сосредоточиться на последней паре уравнений, представив себе операцию сложения двух и более ортогональных по отношению друг к другу векторов в n мерном евклидовом пространстве: $x, y, z, w \dots$. Понимаем под x^2 - квадрат длины вектора, а x - проекцию этого вектора на любую фиксированную ось, обозначаемую как x_{pr} . В силу ортогональности итоговая сумма векторов будет иметь квадрат модуля, равный сумме квадратов модулей исследуемых векторов $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \dots$, а проекция на выбранную ось $x_{pr} + y_{pr} + z_{pr} + w_{pr} + \dots$ сумме проекций. Далее остаётся применить ассоциативный закон для членов одинаковой размерности и свести задачу к уже рассмотренному неравенству треугольника.

7 Пифагоровы 3-ки $\exists$ только на 2D ПЛОСКОСТИ

Пифагоровы 3-ки существуют только на 2D плоскости. Закономерно вытекает вопрос: почему? Пифагоровы тройки использовались для вычислений ещё древнейшей цивилизацией Шумеров за тысячелетия до рождения самого Пифагора для решения тригонометрических задач, включая сложение / вычитание углов. В чем особенности двумерной плоскости по сравнению с n -мерным пространством $n \geq 3$? Пифагоровым треугольникам посвящена книга [Сер59].

[Сер59]: Серпинский (1959),
Пифагоровы треугольники

Чтобы найти простейший ответ, можно воспользоваться старым добрым магнитофоном, в котором лента перематывается с левой катушки на правую или наоборот. В этом случае сумма площадей левой и правой бобины ленты остается постоянной и равна толщине ленты, умноженной на ее длину.

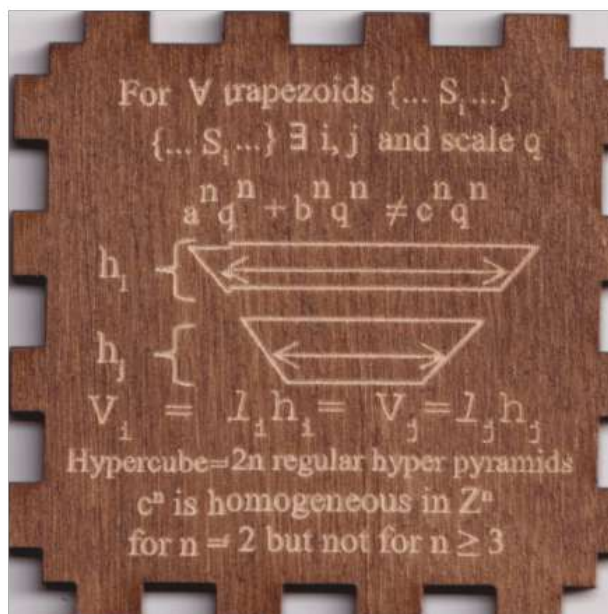
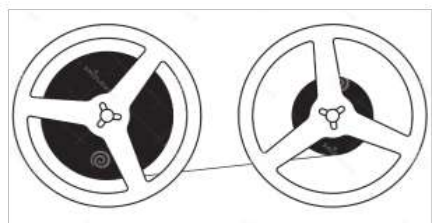


Рис. 7.4: Эквивалентность слоев на 2D-плоскости для кругов и квадратов. Справа - фотография грани авторского 3D-куба согласно заявке патента на пром. образец № 2021501435/49 от 20.03.2021

Допустим, мы зафиксировали момент, когда левая катушка/ бобина имеет радиус j больший, чем правая i . Когда мы говорим о необходимости сохранения симметрии фигуры при непрерывном отображении или перемещении слоя, это означает, что один оборот ленты слева должен укладываться в целое число оборотов бобины справа: два,

три, четыре и т.д., но не дробное число, иначе будет нарушено условие сохранения симметрии при перемещении или отображении слоев. Действительно, частично заполненный слой имеет дефект симметрии, он **асимметричен**. Предположим мы можем изготовить ленту произвольной толщины, тогда для любого заданного соотношения радиусов окружностей катушек мы легко добьемся симметрии в этой модели, а именно: один слой или виток на большой катушке эквивалентен множеству полных витков или слоев на малой катушке.

В общем случае, речь идет не об одном слое, а **упорядоченном** множестве слоев $\{S_j \dots\} \mapsto \{\dots S_i\}$. Здесь записаны в прообразе S_j - первый элемент, а на образе S_i - последний элемент. (Помним, что исследуемая структура заполнялась слоями от периферии $j \dots i, (i-1)$ к центру. Из этого следует, что целочисленные радиусы слоев $j > i$ должны быть не менее $j = i + 1$, иначе можно просто перемотать ленту или поменять катушки.)

Отметим, что в случае n -куба (определение дано ниже) размерности 2 или, проще говоря, квадрата на плоскости, картина аналогична. В силу симметрии удобно сосредоточиться на изучении единственного сегмента, образованного лучами, исходящими из центра n -куба, совпадающего с началом координат, в вершины одной грани этого куба, и применить формулу для площади трапеции по произведению длины средней линии на ее высоту (Рис. 7.4 справа). Легко убедиться в сохранении объема **меры** подмножества слоев прообраза, отображенного в образ, на множество последовательно и непрерывно следующих слоев, расположенных ближе к началу координат. Одновременно сохраняется симметричная форма исследуемой конструкции. Этот случай уникален для пространства размерности два $n = 2$ или плоскости. Для пространств иной размерности одновременное сохранение меры (объема) и симметричной формы в образе и прообразе невозможно. Почему это так объясняется ниже.

Не обязательно уметь интегрировать

Не обязательно уметь интегрировать, чтобы вычислить объём (гипер)пирамиды - достаточно научиться рассекать (гипер)куб на идентичные гиперпирамиды по числу (гипер)граней. И не ограничиваться только

правильными (гипер) пирамидами. Для этого можно мысленно, заполнить пирамиду жидкостью, поместив её в однородное гравитационное поле, можно применить закон Паскаля и заметить, что давление на основание пирамиды зависит от веса, массы, объёма пирамиды, но в конечном счёте, однозначно определяются высотой и площадью основания, независимо от формы пирамиды. Примените полученную формулу $\frac{H}{n}S$ к 2D, 3D, 4D . . . и убедитесь в её соответствии известным из школьной программы площади треугольника и объёму пирамиды. Помните, что площадь S соответствует мере грани размерности $n-1$. Творческое воображение упрощает вычисления и делает интегрирование в ряде случаев ненужным!

Для n -мерного пространства Пифагоровы тройки могут быть в виде Декартова произведения результата вычитания квадратов на некоторый кубоид: $(c^2 \setminus b^2 = a^2) \times d^{n-2}$ где a, b, c -это Пифагорова тройка на двумерной плоскости.

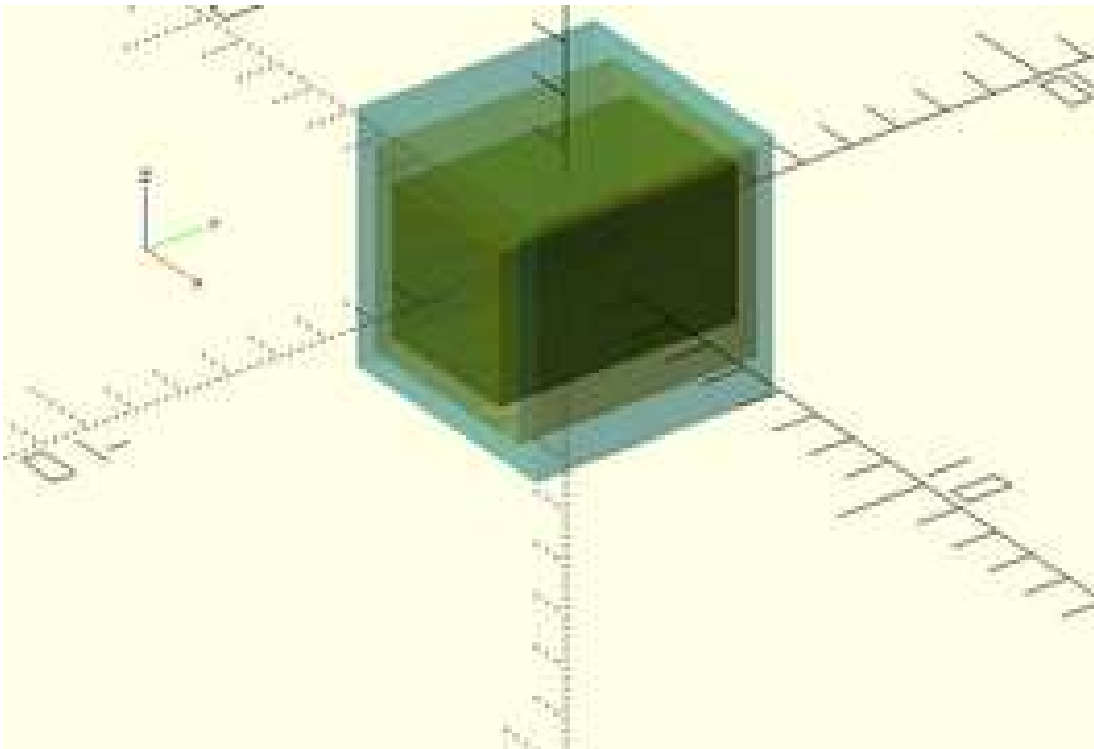


Рис. 7.5: Пример Пифагоровой тройки в 3D. Соблюдена лишь осевая симметрия. Фигура, соответствующая с позиции теории множеств арифметическому выражению $(5^2 \setminus 4^2 = 3^2) \times 5^1$

Рисунок 7.5 напоминает многожильный кабель квадратного сечения, где соблюдена лишь осевая симметрия, но

не центральная симметрия.

В школе и вузе на уроках физики, геометрии, черчения, инженерной графики или 3D моделирования учащиеся привыкли работать с осевой симметрией, симметрией относительно плоскости, построенной на определенных осях, а также с центральной симметрией. Легко обобщить приведенную выше таблицу на n -мерный случай.

Таблица 7.2: Симметричность в четырёхмерном пространстве $n = 4$.

Симметрия относительно:	Симметричность относительно подпространства $\perp$ размерностью	Симметричность вдоль подпространства $\parallel$ Размерностью (степень симм.)	Во что отобразится точка с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4)
I	II	III = n - II	IV
Куба по осям X_1, X_2, X_3	3	1	$(x_1, x_2, x_3, -x_4)$
Плоскости $(X_1 \times X_2)$,	2	2	$(x_1, x_2, -x_3, -x_4)$
Оси X_1	1	3	$(x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$
Точки в начале координат и в центре всех гиперкубов	0	4	$(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$

Доказательство ВТФ сводится к разрешению вопроса о неустранимом конфликте между центрально симметричной формой и содержанием в конструкции из трёх концентрических шаров $B_c^n \setminus B_b^n \neq B_a^n$ с целочисленными радиусами $a, b, c \in \mathbb{Q}$ для случая размерности пространства $n > 2$, поскольку симметрия и условие сохранения меры (объёма) при отношениях эквивалентности должна была бы также выполняться для произвольного "большого" слоя, отображаемого в множество "малых" слоёв, но $\nexists \{S_j\} \mapsto \{\dots S_i\}$. Этот конфликт сформулирован на первой странице обложки монографии.

Что препятствует для случаев трёх и более мерного пространства - "наматывать" слой за слоем (сферу за сферой) с большого шара на малый подобно распусканию вязанной вещи из шерстяной нити? Попробуем рассмотреть этот вопрос с позиции "чистой математики" для этого необходимо кратко рассмотреть некоторые понятия теории множеств, непрерывности функции, метрической топологии, гомеоморфизма, попарно не пересекающихся классов эквивалентности.

8 Непрерывность. Гомеоморфизм.

Классы эквивалентности

Российская фигуристка Камила Валиева вызывает восхищение, грациозно исполняя плавный танец. Танец состоит из различных фигур, плавно переходящих друг в друга. Можно проиграть фильм задом наперед - за исключением

прыжков отображения фигур будут обратимы. Аналогично, представьте себе некоторую функцию $f(X) \rightarrow Y$, отображающую открытое множество X на множество Y .

Гомеоморфизм множеств $X \cong Y$

У каждого образа есть прообраз. Выберем в образе открытую окрестность точки B , например, в виде шара. Предположим, что точка A полностью отображается на эту окрестность точки B . Это и есть определение непрерывности. Пусть также существует обратная непрерывная функция $f^{-1}(Y) \rightarrow X$. Мы получили гомеоморфизм $X \cong Y$.

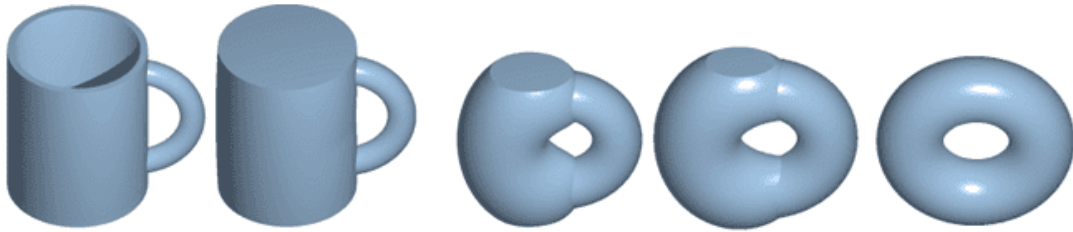


Рис. 8.6: Говоря о гомеоморфизме, отметим интересное преобразование кружки в тор и наоборот.

В терминах топологической теории, понятия гомеоморфизма доказательство ВТФ сводится к невозможности построения трех определенных выше концентрических шаров с центром в начале координат и с целочисленными радиусами, так, чтобы $B_c^n \setminus B_b^n \mapsto B_a^n$ в однородном (что означает отсутствие разрывов / пробелов между последовательно следующими слоями), симметричном пространстве $\mathbb{R}^n$ для случая размерности пространства $n > 2$. Вместо стрелки в последнем выражении можно поставить знак $\cong$ гомеоморфизма.

9 Сведения из теории множеств

3D-моделирование предоставляет широкие возможности для демонстрации операций пересечения, объединения и вычитания множеств. Пример обозначение пустого множества: $\emptyset$. Вот обозначение универсального множества: U . На диаграмме Эйлера-Вена универсальное множество соответствует всему прямоугольнику. Базовые знания о дополнении множества будут полезны. Шахматная доска

- это хорошо известная иллюстрация [Декартова произведения](#), обозначаемого как $\times$.

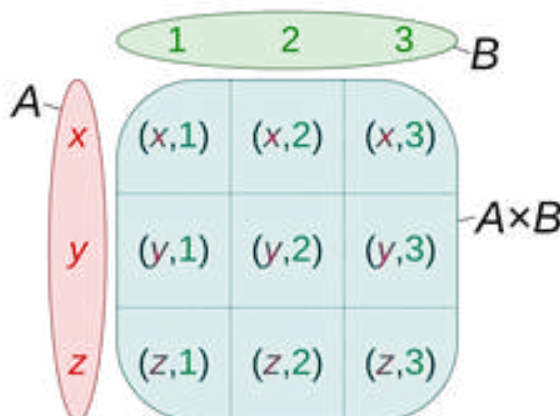


Рис. 9.7: Пример Декартова произведения множеств. Он напоминает шахматную доску.

Но почему только числа? Самый обычный металлический молоток на деревянной ручке можно рассматривать как результат операций [различия](#) над множествами, таких как [объединение](#) $\cup$, пересечение $\cap$, вычитание $\setminus$ ручки и собственно металлической части молотка.

[Вин18]: Виноградов (2018), Основы теории чисел

[Бух13]: Бухштаб (2013), Теория чисел

[Нов04]: Новиков (2004), Дискретная математика для программистов

Автор призывает читателя обратиться к специальной литературе [Вин18], [Бух13] математическим форумам, онлайн-курсам и справочнику для получения начальной информации в перечисленных областях знаний [Нов04].

При моделировании трёхмерных фигур можно убедиться в преимуществах знания основ теории множеств и, кроме того, проверить действие [ассоциативных](#) правил, когда выражения можно переписать альтернативными способами. Например, смоделировать цепь множеств из слоёв / сфер, см. формулу (13.2) ниже.

10 Мощность множества и функция эквивалентности

Мощность множества - это не что иное, как количество элементов в нем. Это понятие легко понять на примерах. Рассмотрим множество $A = \{\blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle\}$ треугольников и множество $B = \{\star, \star, \star\}$ звезд. Эти множества называются [равномощными](#), так как имеют одинаковое число элементов, обозначаемых этими символами A эквивалентно B или $|A| \sim |B|$. Легко видеть, что множество натуральных чисел N эквивалентно множеству целых чисел

$\mathbb{Z}$, так как каждая пара: $1 \mapsto \pm 1$, $2 \mapsto \pm 2$, $3 \mapsto \pm 3$ и так далее нумеруется одним числом. Такое множество называется счетным. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ является счетным. И множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ также является счетным.

Необходимость считать предметы вызвала появление натуральных, то есть положительных целых чисел. Дроби появились при торговых расчетах и при измерениях величин. Развитие геометрии привело к выяснению того факта, что диагональ квадрата со стороной единица не может быть измерена точно рациональным числом, хотя может быть измерена им с произвольной точностью. Таким образом, внутреннее развитие математики привело к появлению длин, неизмеримых тори помощи рациональных чисел. Следовательно, из внутренних потребностей математики возникли иррациональные числа, которые стали называть иррациональными.

Так коротко и ясно пишет Л.С. Портнягин в [Пон86]. Из всего списка литературы, пожалуй именно это книгу просто необходимо прочитать для точного понимания материала Монографии.

Математик Георг Кантор предложил оригинальный способ обхода каждого рационального числа в виде дробного p делить на q . Представим себе бесконечный кинотеатр со строками - рядами p и столбцами - местами q .

Очевидно, безбилетник в ряду p на месте q будет достигнут контролёром. Таким образом, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является счетным. В случае вещественных чисел $\mathbb{R}$, включающих иррациональные числа, которые не могут быть представлены в виде дроби, это не так.

Контролер следует по бесконечному залу в поисках безбилетника, по диагоналям наискосок мест и рядов, например, стартуя с левого верхнего угла, он двигается по зигзагообразной линии, постепенно расширяя зону осмотра в виде наклоненного треугольника с растущей гипотенузой и катетами, расположенными вдоль сцены и левого края зала.

Важно помнить, что, говоря об отношениях, задаваемых непрерывными и взаимно обратимыми функциями, мы

[Пон86]: Портнягин (1986),
Обобщения чисел

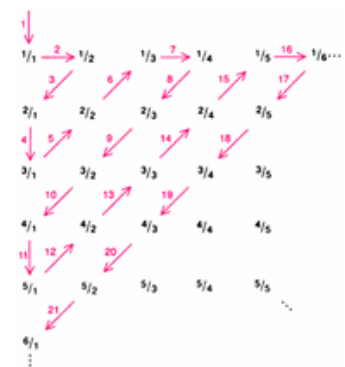


Рис. 10.8: Счетность множества рациональных чисел
Счетность множества рациональных чисел
Счетность множества рациональных чисел

[Ю12]: Ю (2012), Элементы теории множеств и математической логики



Рис. 10.9: (1845–1918) Наиболее известен как создатель теории множеств. Основатель и первый президент Германского математического общества, инициатор создания Международного конгресса математиков.

можем сравнивать только пространства одинаковой размерности. Возьмем, например, карандаш. Можно представить себе точечный источник света, освещающий его сверху, и этот вертикально ориентированный карандаш отобразить в точку, но обратное преобразование из точки в карандаш сделать нельзя, так как нарушается принцип взаимной однозначности. Антиподом взаимной однозначности является, например, определяемая аксиомой [Ю12] мера $f : R^n \mapsto R$ над множеством или объём фигуры для трехмерного случая. Мера обладает свойством аддитивности, что не просто удобно для физических измерений массы, объёма, но и выражает свойство материи нашего мира (вспомним закон сохранения количества вещества при химических реакциях).

11 Метрическая топология. Конструкция

Обратимся к теории множеств, бинарных функций и основам топологии. Совокупность множеств в виде открытых n -кубов e^n с центром в начале координат, т.е. Декартово произведение открытого отрезка $e^n = (-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})^n$ определяет базу топологии Ω в метрическом пространстве R^n . Эквивалентная топология задается набором множеств в виде открытых шаров - различаются только их метрики: $\max(x_j) < r$ для первого и $\sum_1^n x_j^2 < r^2$ для второго [п.4.3. в 5]. Ниже под словами гиперкуб и слой будут также использоваться открытая сфера размерности n , радиуса r B_r^n и ее замыкание - сфера S_r^{n-1} размерности $n-1$ и радиуса r .

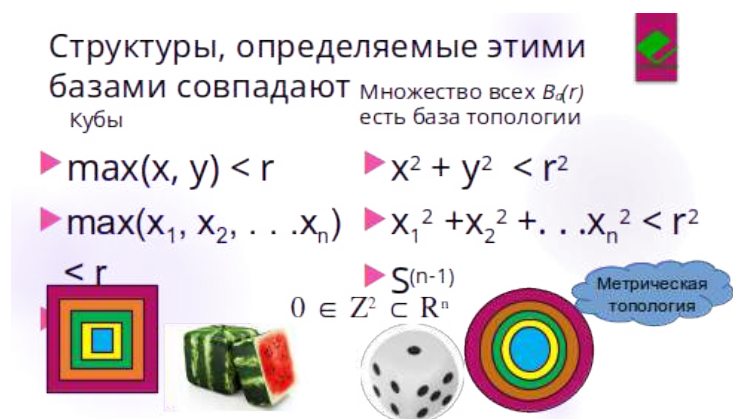


Рис. 11.10: Вложенные n -кубы и шары

Структуры, определяемые этими базисами, совпадают.

Говорят, что здесь определена метрическая топология [Вир10], и задано метрическое пространство. С позиции топологии сфера и куб гомеоморфны. (Сравните кубический арбуз и округлый куб на рисунке 11.10.

[Вир10]: Виро О Я Иванов О А (2010), Элементарная топология

Представим себе вложенные друг в друга открытые шары. Сами сферы, замыкающие шар, не принадлежат к открытому шару. Для n -мерного случая все работает так же, но здесь вместо двух координат будет n координат. Сумма их квадратов остается меньше квадрата радиуса R . Для случая кубов картина принципиально не меняется, просто используется несколько иная метрика, где вместо квадрата подставляется функция максимального значения X или Y меньше радиуса R . Для случая n -мерного пространства у нас будет на два, а n слагаемых.

Аналогичную картину вложенных слоев, похожую на "Русскую Матрёшку можно наблюдать на двумерной плоскости пронзание n -куба. Мы хотели бы подчеркнуть именно пронзание, а не рассечение, поскольку из основ линейной алгебры легко понять, что куб рассекается такой плоскостью на два несвязных пространства. Но для пространств размерности $4D$, начиная с тессеракта, двумерная плоскость может быть замкнута сколь угодно малым непрерывным контуром, поперечным к ней. Картина напоминает запеченное яблоко на шпажке. Действительно, из курса линейной алгебры [Кур13] следует, что если $AX = 0$, то для $3D$ $\text{rank}(X) = n - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1$ - т.е. точка делит прямую на два луча, а начиная с $4D$, плоскость можно продевать, сквозь множество точек пересечения фигур как нитку в игольное ушко. К сожалению, этот очевидный факт не осознается некоторыми учеными, когда они сталкиваются с цепью множеств в виде n -кубов, вложенных друг в друга!

[Кур13]: Курош (2013), Курс высшей алгебры

Для шаров ситуация самоочевидна. Ранее мы убедились см. Рис. 4.2, что в топологии шар и куб гомеоморфны друг другу и легко превращаются друг в друга в результате деформации без разрыва пространства.

Удивительно, что на идеально гладкой однородной поверхности n -мерного шара существуют геометрические элементы всех размерностей от 1 до $n-1$ (гипермеридины), которые непрерывной функцией отображаются раздельно по каждой размерности! - А это ключ к

доказательству ВТФ.

Для случая n -куба размерности два или, проще говоря, квадрата на плоскости картина аналогична. Что мешает нам провести аналогичный эксперимент для случая трех и более мерного пространства? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо познакомиться с понятием **попарно не пересекающиеся классы эквивалентности**.

12 Не пересекающиеся классы эквивалентности

Взгляните на фотографию Тадж-Махала, памятника индийской архитектуры. Он обладает симметрией относительно вертикальной оси, проходящей через его центр. Симметрия является прекрасной демонстрацией работы функции эквивалентности, но есть и другие примеры: перемещение твердого тела, его вращение и так далее.



Рис. 12.11: Тадж-Махал состоит из разных элементов: колонны отображаются в колонны, купола в купола, и никакого смещения нет.

Обратите внимание, что Тадж-Махал состоит из разных элементов: колонны отображаются в колонны, купола в купола, и никакого смещения нет. Другой пример - шахматы. Пока игра продолжается на паритетных началах, пешки обмениваются на пешки, легкие фигуры: слон, конь - на легкие фигуры, ладья обменивается на ладью, а ферзь - на ферзь. Это попарно не пересекающиеся классы эквивалентности. Функция эквивалентности работает с каждым классом отдельно, это легко доказать строго математически. И снова никакого смещения не происходит. Другими словами, отношения эквивалентности работают с каждым классом эквивалентности отдельно. Можно разложить слой на элементы разных размерностей и снова обратиться к табл. 6.1

$$S| \sim = \{S_{n-1} \setminus S_{n-2}, \dots, S_2 \setminus S_1, S_1 \setminus S_0\} \quad (12.1)$$

(в частности, для $n = 3$ это две полусферы, исключаяющие окружность в плоскости $(0, x, y)$, для $n = 2$ окружность, исключая две конечные точки $(0, -r/2), (0, r/2)$). Выражение $S| \sim$ обозначает **факторизацию** слоя, полезную для анализа его элементов. Каждый из перечисленных классов имеет размерность подпространства, которому он принадлежит

$$S_m \setminus S_{m-1} \cong \mathbb{R}^m, \dim(S_m \setminus S_{m-1}) = m. \quad (12.2)$$

Применим факторизацию к слою из нашей конструкции в виде трех концентрических сфер или n-кубов. Произвольно выбранный элемент (подмножество элементов) из разности множеств $1^n \in c^n \setminus b^n \mapsto a^n$ отображается в малый куб (шар) в силу формулировки ВТФ.

Definition 12.1 Ограничим прообраз до одного слоя. Такая операция в теории множеств называется **ограничением** отношений эквивалентности на подмножество, как если бы орнамент был ограничен с помощью трафарета.

И зададимся вопросом во что отобразится слой? - В силу сохранения центральной симметрии образ слоя также должен быть симметричным. Следовательно, образом будет множество последовательно и непрерывно следующих слоёв.

Остановимся на непрерывном отображении единичных гиперкубов 1^n слоя в множество слоёв $\{S_j\} \mapsto \{....S_i\}$.

13 Цепь множеств из n-кубов

Как уже говорилось выше, **а-Малый** n-куб a^n - это множество слоев, индексированных от 1 до k, **б-Средний** b^n - множество слоев от k+1 до k + l и **с-Большой** c^n - множество слоев от k+l+1 до k + l + m, где k, l, m $\in \mathbb{N}_1$.

Попробуем создать конструкцию в OpenScad

```
//*****
// Листинг 1 Слой.scad
// Эта программа создаёт 3D- уголок из
// элементов разных размерностей (2-D-сайдинг)
// пара уголков 1-D и вершина куба 1^n - 0-D
// Вершина уголка - в начале коорд.
// (center=false, а не center=true)
//*****

q = 5; // Задаёт Масштаб. Не забываем знак «;»
```

```

edge = 5*q; // Рзамер ребра (гипер)куба
step = 1.5; // Шаг или зазор step >= 1

cube([edge,edge,1],center=false);
// Нижняя грань куба, ортогональная Y,
// размером edge

translate([edge + step,0,step])
// Перемещение курса в точку с коорд. (x,y,z)

cube([1,edge,edge],center=false);
// Грань куба, ортогональная оси X

translate([edge + step,0,0])
// За оператором translate без ; следует фигура
cube([1,edge,1],center=false);
// Ребро куба, расположенное поперек оси X
translate([0,edge + step,0])
cube([edge,1,1],center=false);
// Ребро куба, расположенное поперек оси Y
translate([0,edge + step,step])
cube([edge,1,edge],center=false);
// Грань куба, ортогональная Y
translate([edge + step,edge + step,step])
cube([1,1,edge],center=false);
// Ребро куба, расположенное паралл. оси Z
ranslate([edge + step,edge + step,0])
cube([1,1,1],center=false);
// Вершина куба.

```

В результате получится слой, а совместно с программным циклом

```
for (j = [ i : -1 : 1]) //Чуть измененный листинг 1}
```

для построения слоёв от периферии к центру используется счётчик $j = i, i - 1, i - 2 \dots 1$ - образуется множество слоёв или проще говоря уголок, как на рисунке 13.12.

Definition 13.1 Слой определяется как разность подмножеств $S_i = e_i \setminus e_{i-1}$, $i > 1$, где e_i обозначает n -куб с ребром i .

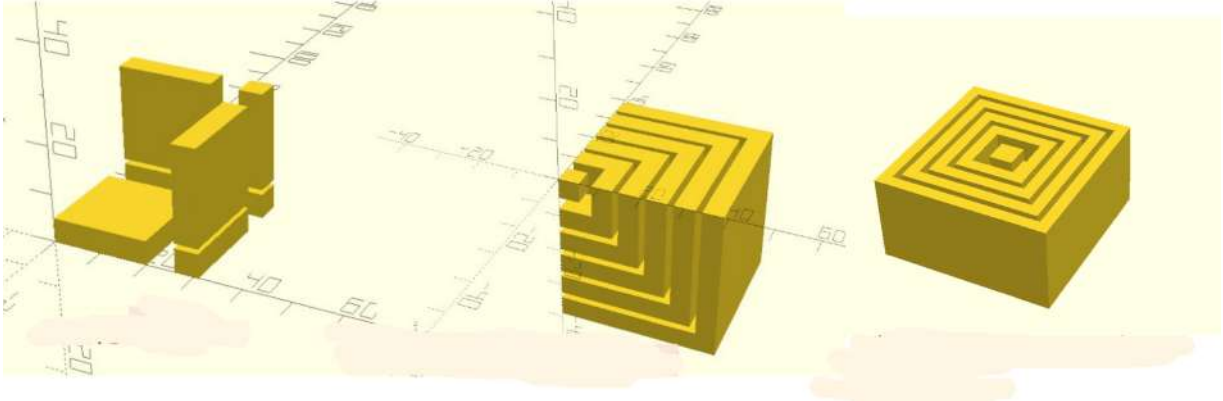


Рис. 13.12: Построение одного слоя (слева) и множества слоев в октанте (+, +, -)

Ниже приводится полностью упорядоченное множество слоев (также называемое строго упорядоченным множеством, линейно упорядоченным множеством, обозначая отношения порядка $<$):

$$e_0 \subset e_1 \subset e_2 \cdots \subset e_{k+l+m} \subseteq U \quad (13.1)$$

или

$$e_0 < S_1 < S_2 \cdots < S_{k+l+m} \in U \quad (13.2)$$

где под универсальным множеством $\mathcal{U}$ понимается s -Большой куб. В качестве первого гиперкуба e_0 может быть 1^n или 2^n , в зависимости от четности, но с учетом приведенных ниже рассуждений это не существенно. Разложение множества на подмножества мы рассматривали выше. Цепь множеств (13.1, 13.2) определяет топологию в $\mathbb{Z}^n$. С другой стороны, эта формула описывает одномерный зонд, пронизывающий три вложенных гиперкуба через общий центр.

Размерность слоя n -куба можно увидеть из хорошо известного **бинома Ньютона**. См. также [Гал15] Чтобы понять, из каких элементов состоит произвольный слой S_i , воспользуемся **треугольником Паскаля**, в котором коэффициенты $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, число сочетаний записаны по строкам, и каждый коэффициент, за исключением крайних единиц, получается путём суммирования двух соседних, находящихся строкой выше, вот его первые строки: 1-2-1, 1-3-3-1, 1-4-6-4-1 и т.д. как на таблице 13.3 на полях книги.

В результате старший член многочлена приведенного ниже исчезает, а степень многочлена понижается до $n-1$.

Декартово произведение двух ортогональных зондов представлено на Рис. 4.2, слева - исследователь получит двумерную плоскость, независимо от размерности пространства. Топология n -куба индуцирована на этом подмножестве, так как $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{Z}^n \in \mathbb{R}^n$. Эффект параллакса отсутствует

[Гал15]: Гальперин (2015), Многомерный куб

Таблица 13.3: Треугольник Паскаля

n	Бином. коэфф.
1	1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
...	...

Знак суммы $\sum$ можно заменить на знак объединения $\cup$.
Таим образом анализ структуры слоя дает следующее:

$$S_i = (i+1)^n - i^n = e_{i+1} \setminus e_i = \bigcup_{k=1}^{k=n-1} C_n^k i^k 1^{n-k} \quad (13.3)$$

Здесь $i^k 1^{n-k}$ следует воспринимать как Декартово произведение отрезков. Посмотрите на угол 13.12 (левая часть рисунка) рисунка), сравните с каскадом уголков (центр того же рисунка), которые вместе образуют куб (правая часть того же рисунка). Декартово произведение линейного отрезка на квадрат образует куб. Это свидетельствует о соблюдении принципа размерности. Приведенные выше формулы получены из бинома Ньютона и описывают слой как разность последовательных гиперкубов с общей вершиной, совпадающей с началом координат. Альтернативный способ представления исследуемой конструкции состоит в том, что начало координат, располагается в общем центре гиперкубов. Его можно получить путем n отражений гиперплоскостей, т.е. умножения на 2^n , что принципиально не меняет сути формулы. Обе геометрические конструкции трансформируются друг в друга отражениями от гиперплоскостей, перпендикулярных каждой из n координатных осей, либо рассечением и масштабированием фигуры.

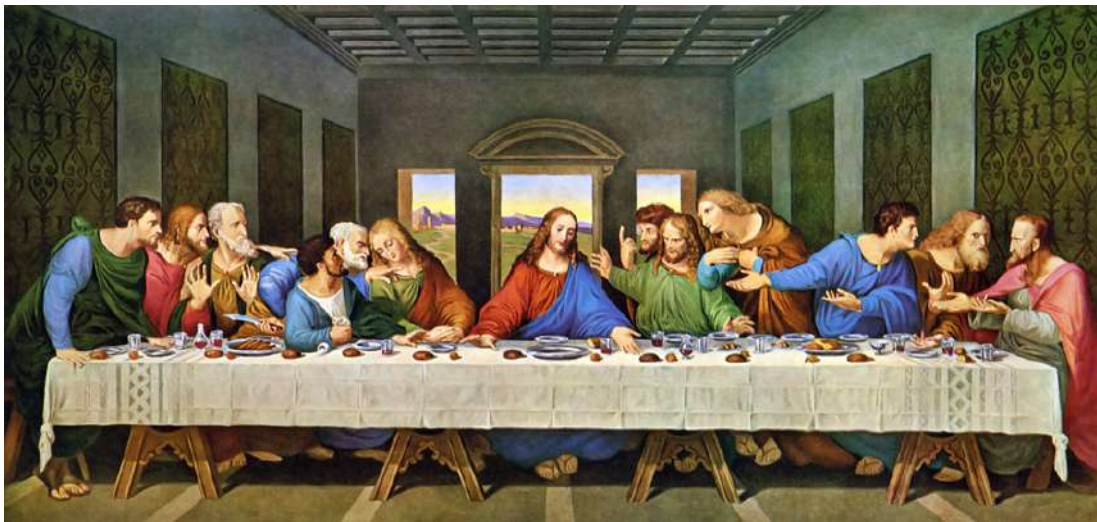


Рис. 13.13: Картина Тайная Вечеря Леонардо да Винчи демонстрирует эффект параллакса. Все линии: продолжение углов стен, потолка, пола сходятся в точке схода - на лбу Иисуса Христа. Это создает ощущение объёмности пространства

Каждый слой гиперкуба имеет элементы размерности $n-1$, $n-2$, ... 1 (гипер)граней, а рёбр таких элементов описыва-

ются формулой $i^k 1^{n-k}$ - обозначим такой параллелепипед более кратким синонимом **кубоид**.

Если в полученном множестве убрать повторяющиеся элементы, т.е. сократить биномиальные коэффициенты, то результат полностью совпадет с формулой, полученной ранее для описания структуры сферы (13.2) - ещё одно наглядное выражение гомеоморфизма n-шаров и n-кубов.

А в листинге на полях номер слоя может быть любым натуральным числом. И если применить программный цикл, то весь гиперкуб легко будет заполнить послойно от центра к периферии.

```
//Слой S5 номер 5 (i = 5)
i = 5;
difference()
{
  cube ( i, center = true);
  cube(i - 1, center = true);
}
```

Взгляд из n-мерного пространства

Краткая форма листинга на полях универсальна и не зависит от размерности пространства (если бы OpenScad был настроен на работу с n -мерным пространством). Говоря более детально, следует запрограммировать масштаб и длину ребра гиперкуба, определить шаг и зазор между слоями. Далее - последовательно перемещать курсор в точку с координатами (x, y, z) и создавать кубоиды необходимых размеров в виде трёх граней, трёх рёбер и одной вершины. В результате получится слой, а совместно с программным циклом образуется множество слоёв

В случае квадрата ($n = 2$) на плоскости, см. выше Рис. 7.4 формулу для площади трапеции в виде произведения длины средней линии на ее высоту. Это убеждает, что на плоскости при работе функции эквивалентности сохраняется как объём - мощность подмножеств, так и симметричная форма конструкции, соблюдается непрерывность.

Важно помнить, что, говоря об отношениях непрерывных и взаимно обратимых функций, мы можем сравнивать только пространства одинаковой размерности. Обобщая вышесказанное, можно сделать вывод, что точка не может быть эквивалентна отрезку, отрезок - квадрату или кругу на плоскости, а эти последние фигуры - трехмерному кубу. Из рис. вытекает, что непрерывное, взаимно однозначное соответствие возможно лишь между фигурами одинаковой размерности. Тот же принцип применим и к дискрет-

[ПС86]: Пригожин и др. (1986),
Порядок из хаоса: Новый диалог
человека с природой

ному пространству, состоящему из элементарных кубов. Это наглядная демонстрация [принципа соответствия](#) в науке. Термин "принцип соответствия" используется в более общем смысле для обозначения сведения новой научной теории к более ранней при соответствующих обстоятельствах [ПС86], например, специальная теория относительности Эйнштейна сводится к классической механике при скоростях, малых по сравнению со скоростью света.

14 Аксиомы Евклида в XXI

Какая форма должна быть у точки? Вопрос представляется на первый взгляд лишенным смысла - точка это нечто округлое, наносимое кончиком гусиного пера, карандаша иголки и т.д. Так оно и было на протяжении 6000 тысяч последних лет человеческой истории. Но с развитием наук (топологии, комбинаторики, кибернетики, информационных технологий) под точкой можно понимать 1^n . Попробуем проверить Аксиомы Евклида с позиций знаний века XXI.

[ГСМ78]: Г.С.М. КОКСЕТЕР
(1978), Новые встречи с геометрией

Евклидова геометрия известна также как геометрия плоскости. [ГСМ78] В эпоху цифровых технологий мы можем дополнить постулаты Евклида элементами, полученными из элементарных кубиков 1^n , выстроенных в ряд, прямоугольник, 3D-куб и так далее. (Заметим, что мы работаем в n -мерном пространстве!) Размерности созданных фигур будут такими же, как если бы мы имели дело с точками. Например, $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ согласуется с формулой, описывающей структуру слоя (13.3).

Таблица 14.4: Постулаты Евклида в дискретном пространстве

Фигура в R^n	Аналог в $\mathbb{Z}^n$ - дискретном n -мер. пространстве целых	Размерность
Точка	1^n	0 или n
Отрезок	1^n , выложенные в ряд $i^1 * 1^{n-1}$	1
Плоскость	1^n , выложенные в плоскости $i^2 * 1^{n-2}$	2
Гиперплоскость	1^n , выложенные в 3D подпр-ве $i^3 * 1^{n-3}$	3
...	...	...

[Эвк48]: Эвклид (1948), Начала Евклида Книга II Перевод
Д.Д.Мордухай-Болтовского

В дополнение к аксиомам Евклида [Эвк48] полезно проанализировать изученные нами конструкции с точки зрения аксиом топологии, которые хорошо изложены в ряде учебников, например, мы уже обсуждали понятие метрического и топологического пространства (см. рис. 4.2).

Из аксиом топологии [Тре01] соответствие между точкой в пространстве R^n и элементарным n -кубом 1^n в топологическом пространстве Ω становится еще более ясным. Определенный выше кубоиды $i^k 1^{n-k}$ в топологическом пространстве могут быть созданы путем операций Декартова произведения отрезков. В свою очередь, эти кубоиды размерностью от 1 до $n-2$ объединяются в слой размерностью $n-1$. Заметим, что оговорка **0 или n** в первой строке последнего столбца табл. 14.4 означает, что в приведенной выше формуле (13.3) $i^k 1^{n-k}$ **кубоида** множитель 1^{n-k} не имеет размерности. Одновременно, изменяя масштаб, измельчая разбиение пространства получим: $1^n \mapsto e^n$, т.е. n -куб. Пространства различной размерности $\Omega^n \cong \Omega^k$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда $n = k$.

[Тре01]: Трельфалль (2001), Топология. Зейферт Г Трельфалль В

В самом деле, если теорема Ферма справедлива для троек целых чисел, то единицы измерения не имеют значения, будь то метры, сантиметры, миллиметры, микрометры, нанометры и т.д. Это означает не только равенство, но и **тождественность** уравнения Великой теоремы Ферма, или, другими словами, независимость результата от **разбиения** исследуемого многообразия, подобно тому, как это происходит при интегрировании. Единичный куб можно сделать сколь угодно малым, но суть явления от этого не меняется. Это важно для понимания как для учащихся, не знакомых с математическим анализом.

Проверено тысячелетиями

Правомерно ли выделение из сферы $S^2 \setminus S^1$, ее произвольного $\forall$ элемента - экваториального круга? - Это законный прием, известный из "Элементов" Евклида, сформулированных в III веке до н.э., и из школьных курсов геометрии, посвященных плоскости, стереометрии и черчению. Этот приём выдержал проверку на протяжении тысячелетий, и в доказательство его правомерности можно сослаться на известные архитектурные памятники мирового наследия.

Продолжим эту мысль. Стороны треугольника или другого многоугольника отображаются на элементы другой фигуры путем параллельного переноса/гомотетии/отражения от оси/плоскости, вращения и другими способами. Заметим, что если такое отображение обратимо, взаимно однозначно, то точка остается точкой, отрезок - отрез-

ком (здесь размерность сохраняется). Представим себе правильную трехмерную пирамиду, и её образ, например, за счет голографии. Принцип эквивалентности здесь выражается в том, что пирамида-прообраз в целом отображается на пирамиду-образ, произвольно выбранная грань - на двумерную грань, одномерная грань - на одномерную грань. Черчение и архитектура основаны на этом принципе, который выдержал испытание временем на протяжении как минимум шести тысячелетий. Почему в данной ситуации мы не можем выделить гипермеридиан на сфере и ожидать, что каждый из этих элементов будет отображен на множество элементов соответствующей размерности?

Когда мы работаем с декоративным материалом, например, с сайдингом для дома, принято измерять его в квадратных метрах $i^2 1^1$. Погонажные изделия, такие как перила или плинтус, измеряются в метрах $i^1 1^2$. Но в действительности все перечисленные материалы имеют определенные размеры по длине, высоте и ширине. Однако меньшими размерами обычно пренебрегают. Из определения топологического пространства и постулатов Евклида следует, что единичный куб или 1^n соответствует точке в пространстве размерности n . Все перечисленные фигуры состоят из таких единичных кубов. Они имеют размерность, привычную нам по аксиомам и определению топологии. Что такое аксиома в математике? - Это результат тщательного наблюдения или хорошо проведенного эксперимента.

Аксиомы Евклида и топологии основаны на принципах физики: однородность, изотропность, непрерывность пространства и симметрия.

15 Парадокс. К вершине гиперкуба!

Из алгебраического разложения следует, что фигуры в форме куба с дефектом в виде отсутствующей точки, соответствующие выражению $i^n - 1^n$ множество слоев или $2^n - 1^n$ слой (в $\mathbb{Z}^n$ при условии центральной симметрии), безразличны к элементарным преобразованиям / отображениям, имеют размерность на единицу меньше, чем пространство, в котором эти фигуры созданы. Учитывая

сказанное, таким выражениям и фигурам соответствуют $B_r^n \setminus point$ или S_r^{n-1} . Однако только на плоскости возможно одновременное выполнение условий сохранения симметрии и равенства объёмов, заложенных в теореме Пифагора.

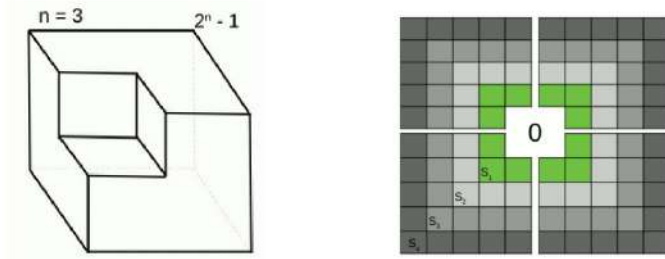


Рис. 15.14: Слева $\dim(2^n - 1) = n-1$ в центрально симметричном $\mathbb{Z}^n$. Справа пересечение дефект куба 2D плоскостью, преобразованное отражениями гиперплоскостей, перпендикулярных каждой из n координатных осей. Нарушение непрерывности следования слоёв.

Заметим, что $2^2 - 1$ также является одномерной фигурой в центрально симметричном пространстве $\mathbb{Z}^2$. Эта фигура слой за слоем отображается на одномерный периметр квадрата 1^2 . Такая ситуация является нормальной в силу условия эквивалентности лишь одного класса для $n = 2$. Размерность - это не тривиальный вопрос в математике. Существует замечательная визуализация [фрактальное множество Мальдерброта](#), которое определяется рекуррентной формулой, и такие фрактальные множества отличаются от привычных нам множеств тем, что при увеличении масштаба множества одни и те же черты повторяются бесконечно.

Представьте, что вы смотрите на карту с высоты птичьего полета, потом вы спускаетесь вниз, приближаетесь к этому объекту, видите все больше и больше деталей, так вот в этих деталях видна более сложная структура, она все время повторяется. Здесь нет ни дуг, ни плавных кривых, ни прямых линий. С позиции определений данных в специальных курсах топологии размерность этого множества является [дробной](#). Фрактальное множество Мальдерброта удивительно красиво! Чтобы лучше понимать особенности n -мерного пространства, предпримем путешествие к вершине гиперкуба.

Путешествие к вершине гиперкуба.

Некоторые уважаемые ученые возражают, что пронзание n -мерного куба двумерной плоскостью на Рис. 4.2 слишком просто и искажает сложную структуру этого

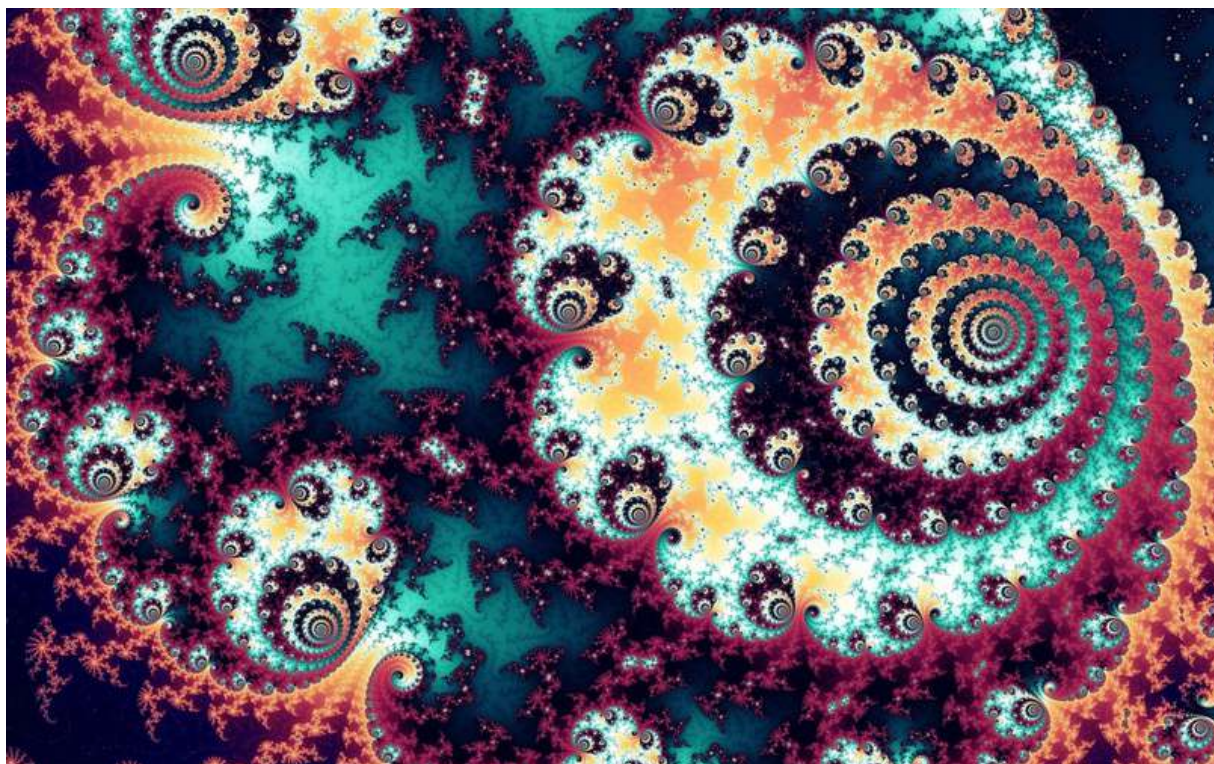


Рис. 15.15: Известнейший фрактал. Его фрагменты не строго подобны исходному множеству, но при многократном увеличении определённые части всё больше похожи друг на друга. Размерность дробная.

куба. Такое недопонимание вызвано плохим представлением о том, что собой представляет n -мерный куб. Для исследования структуры n -куба снова применим метод постановки эксперимента в виртуальной реальности.

Астронавт Фёдор передвигается с помощью реактивного ранца в многомерном пространстве, чтобы совершить путешествие из начала координат и одновременно центра 10-мерного куба, грани которого ортогональны координатным осям, в заданную вершину гиперкуба. На движения, совершаемые космонавтом, налагаются ограничения: разрешалось двигаться только по направлению или против направления любой из n координатных осей. Очевидно, что Фёдор совершит n прыжков: первый - из начала координат в центр грани наибольшей размерности $n-1$, далее - в центр грани размерности $n-2$ затем последует прыжок в центр грани размерности $n-3$. . . На каждом шаге или прыжке Фёдор изменял направление движения, поворачивая под прямым углом.

На последних трех шагах мы, как трехмерные существа, могли наблюдать внезапное появление Фёдора в центре трехмерного куба из невидимого нам четырехмерного

пространства, затем прыжок в центр стены, потолка или пола - по усмотрению Фёдора, после чего из двумерного квадрата - прыжок в центр ребра и, наконец, последний шаг - прибытие в вершину.

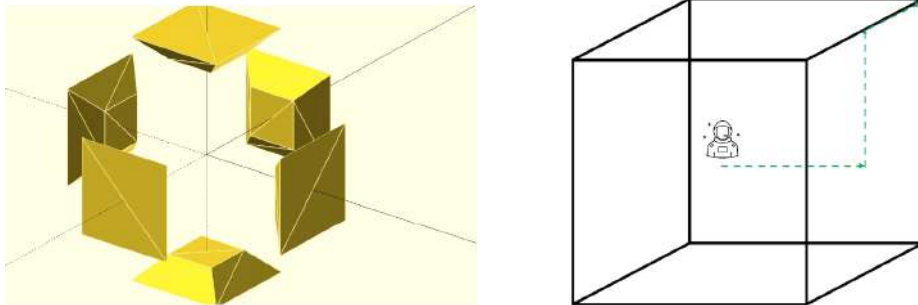


Рис. 15.16: Слева слоистая структура симметричного 3D-куба. Справа последние 3 шага на пути Фёдора к вершине

Судовой журнал астронавта Фёдора по результатам эксперимента может выглядеть примерно так:

- ▶ Стартую из центра Декеракта по направлению оси X_1 .
- ▶ Двигаюсь в Эннеракт по направлению оси.
- ▶ Двигаюсь в Октеракт против направления оси.
- ▶ Двигаюсь в Хептеракт по направлению оси..
- ▶ Двигаюсь в Гексеракт против направления оси..
- ▶ Двигаюсь в Пентеракт против направления оси.
- ▶ Двигаюсь в Тессеракт против направления оси.
- ▶ Двигаюсь в куб по направлению оси.
- ▶ Двигаюсь в квадрат по направлению оси..
- ▶ Двигаюсь в сегмент по направлению оси..
- ▶ Двигаюсь к вершине против направления оси.
- ▶ Финиш!

(Легко догадаться, что при существующих ограничения движения по / против направления оси, Фёдор сможет свободно посетить $\forall$ из $2^{10} = 1024$ вершин гиперкуба.)

Не меняя общности, мы можем расположить индексы координатных осей в порядке возрастания / убывания и получить следующий результат в виде бортового журнала космонавта Фёдора. В этом эксперименте Фёдор, начиная с центра десятимерного куба, двигался только в направлении (обозначается как 1) или против направления (обозначается как 0), последовательно исследовал все его грани размерности от девяти до единицы. Из основ

комбинаторики легко видеть, что количество элементов - мощность множества, состоящего только из двоичных элементов ноль и единица, составляет 2^n - ровно столько же, сколько вершин в n -мерном кубе.

Анализируя двумерный и трехмерный случаи и обобщая результат на n -мерный случай, легко вычислить длину по формуле $\frac{i}{2}\sqrt{n}$ расстояния от начала координат до вершины, где i - ребро куба. Грань n -мерного куба лежит в гиперплоскости, перпендикулярной только что построенной высоте и проходящей через основание этой высоты - точку пересечения прямой с этой гранью. (Заметим, что с точки зрения Фёдора все грани n -мерного куба воспринимаются не как n -мерные, а как плоские фигуры. [MA20])

[MA20]: М.А. (2020), «Теорема Ферма с позиции физики в школе»

Без эффекта параллакса

Отметим, что Фёдор на своем пути наблюдал многомерные кубы с эффектом **параллакса**. Для объяснения этого эффекта можно привести ряд примеров из астрономии, повседневной жизни и произведений изобразительного искусства. Изображения n -мерного куба завораживают своей красотой. Представим себе проекцию n -мерного куба на двумерную плоскость, например, проходящую через оси X, Y , без эффекта параллакса. Какая фигура получится?

Ответ показан на Рис. 4.2. Когда мы исследуем пронзание n -мерного куба двумерной плоскостью в виде Декартова произведения двух зондов или двумерный зонд, перпендикулярный к двум разным граням, - мы работаем с индуцированной топологией.

На деле Фёдор исследовал вложенные топологические **подпространства** $\emptyset \subset \Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \Omega^3 \dots \subset \Omega$ в исходном n -мерном пространстве Ω , все они проходят через начало координат, индекс сверху означает размерность подпространства. Например, в четырехмерном Ω : $\emptyset \subset (x, 0, 0, 0) \subset (x, y, 0, 0) \subset (x, y, z, 0) \subset \Omega$. В каждом из подпространств **индуцирована** относительная топология: концентрические шары с общим центром в начале координат с радиусами, основанными на ряде натуральных чисел см. Рис 11.10. Размерность шаров, m -кубов соответствует размерности подпространства. Для простоты

можно представить последние три подмножества в этой цепочке: в 3D- 2D- 1D-подпространствах, соответственно: шар B^3 , окружность B^2 , линейный отрезок B^1 .

16 Доказательство в одну формулу и чертёж

В традициях Индийских математических трактатов, доказательство сводится к одному чертежу и подписи: **Смотри!** в к Для физика достаточно созерцать 3D куб с его гранями или глобус с его экватором, чтобы постичь доказательство Великой теоремы Ферма.

Представим себе соответствующую выражению $a^n = c^n - b^n$ конструкцию в n -мерном пространстве. Слева - симметричная фигура размерности n . Справа - множество слоев размерностью на единицу меньше. Это множество будет асимметричным (например, сфера с иррациональным радиусом асимметрична), или иметь неустранимый дефект симметрии либо нарушение непрерывности слоев для размерности $n > 2$ (см. Рис.7.4 выше). Рассуждая об неустранимом дефекте симметрии, важно применять правила размерности, сопоставлять объёмы (мощности) по каждому элементу слоя отдельно и далее воспользоваться неравенством треугольника. Следовательно объекта, фундаментальные свойства которого описываются противоречивым образом $\nexists a, b, c, \in \mathbb{Q}$, таких что $B_a^n \cong B_c^n \setminus B_b^n$ в природе не существует! - это доказательство в предельно кратком виде приведено на обложке книги. Центральная симметрия позволяет перейти к послойному сравнению, но $\nexists f : \{S_j\} \longrightarrow \{\dots S_i\}$ где под f понимается непрерывная, обратимая функция эквивалентности. Этот конфликт сформулирован на титульной страницы монографии.

При построении отношений эквивалентности полусферы отображаются в полусферы, а произвольный меридиан - в меридиан. Размерность первой фигуры на единицу больше. Чтобы эти условие выполнялись одновременно, необходимо обеспечить равенство сумм катетов длине гипотенузы прямоугольного треугольника - один из катетов должен быть нулевым, что запрещено по условием ВТФ.

В результате Великая теорема Ферма доказывается от противного.

Достаточно простых школьных инструментов

Для исследования оказалось достаточно простых школьных инструментов: конструкции в виде обычного деревянного кубика для детского творчества, глобуса, шахматного набора, магнитофона на катушках, трафарета, прямоугольного треугольника и зеркала. В эпоху инклюзивного образования такое доказательство понятно слепым школьникам и студентам: достаточно ощупать поверхность школьного глобуса или апельсина с натянутой нитью по экватору, задаться вопросами симметрии, эквивалентности, однородности пространства и сохранения размерности сопоставляемых элементов слоя, для чего достаточно очистить апельсин от корки.

В отличие от американской ста и более страничной версии доказательства ВТФ, все эти простые инструменты наталкивают на вывод об асимметрии нашей Вселенной! Для этого можно поставить последний эксперимент в данной главе. Присмотритесь к лицу красивой девушки и заметьте, что человек, как дитя Вселенной, для чтобы быть красивым, должен быть слегка асимметричным. Случайно ли это или является воплощением более общих принципов развития Вселенной? См. интересную книгу о теории суперструн и роли геометрии, симметрии в зарождении Вселенной [Гри04], [ЯН12].

[Гри04]: Грин (2004), Элегантная вселенная

[ЯН12]: Яу и др. (2012), Теория струн и скрытые измерения Вселенной

17 Гипотеза Леонарда Эйлера

В 1769 году Леонард Эйлер, предположил, что увеличив число слагаемых в уравнении, аналогичном теореме Ферма до четырёх, пяти и т.д., когда степень n превышает суммарное количество сравниваемых гиперкубов слева и справа в Диофантовом уравнении, исследователь обязательно придёт к выводу о его неразрешимости. Ряд учёных-математиков и любителей опровергли эту гипотезу для случая 4-х 5-ти, 7-ми, 8-ми мерных гиперкубов. (Способ разложения одного гексеракта на пять других гексерактов всё ещё дожидается своего звёздного часа.)

Другое обобщение теоремы Ферма на случай четырёх гиперкубов приводит к Диофантову уравнению в виде: $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$. С помощью теории множеств и Диаграмма Эйлера-Венна, предполагая $d > c > b > a$, можно представить выражение из суммы четырех гиперкубов как:

$$d^4 \setminus c^4 = b^4 \cup a^4 \quad (17.1)$$

здесь слева — множество гиперповерхностей размерности $n = 3$, справа — объединение двух гиперкубов размерности $n = 4$. Четвертый гиперкуб a^4 получается путём операций над слоями из b^4 , но произведенных с отступлениями от принципов симметрии степени три в терминах приведенной выше таблицы 7.2.

Согласно доказанной выше теореме Ферма нет эквивалентности между подмножествами $(d^4 \setminus c^4) \setminus b^4 \neq a^4$. Следовательно, есть шансы из дефектов слоёв (частичное удаление слоя) создать новую фигуру, возможно a^4 . Убедимся в принципиальной возможности построения такой конструкции.

Фигура становится несвязной

Если эту новую конструкцию разместить в области положительных значений осей, то при отражении от гиперплоскостей и масштабировании число гиперкубов a^4 увеличивается в $2n$, то есть в 16 раз, при этом фигура становится несвязной. Этим новая модель радикально отличается от ранее рассмотренной комбинации из трёх вложенных кубов со степенью симметрии n — нарушается условие об однородности пространства.

А что можно сказать относительно зондирования двумерной плоскостью? Расположим четыре тессеракта так, чтобы сохранить максимально возможную симметрию конструкции степени два. Для этого рассмотрим плоскости на осях X_1, X_2 (помним, что обе оси X_3, X_4 перпендикулярны этой плоскости.)

Поскольку на 2D плоскости $\forall$ слой S_k соизмерим с другим S_j , построим плоскость натянутую на оси X_1, X_2 (для сокращения обозначим её как $X_1 \times X_2$,- Декартово произведение осей. Для удобства представления выберем

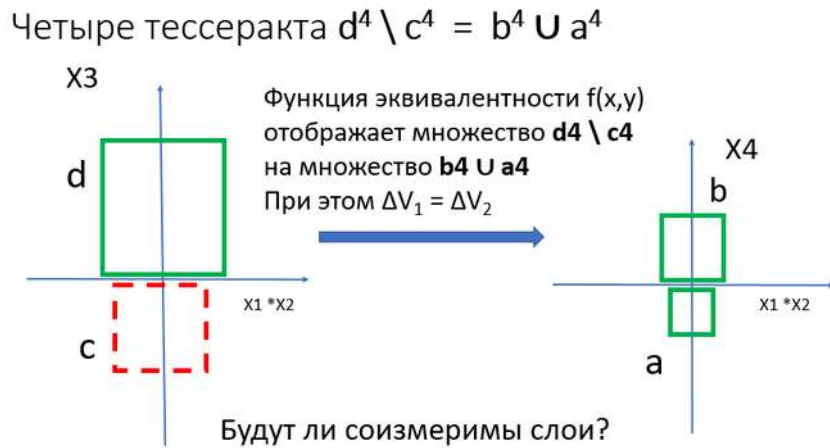


Рис. 17.17: Разрешимо ли Диофантово уравнение $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$?

двумерные проекции $d^4 \setminus c^4$ на плоскость, проведенную через ось X_3 , и ортогональную плоскости $X_1 \times X_2$, а проекцию гиперкубов $b^4 \cup a^4$ - соответственно на плоскость, проведенную через ось X_4 , также ортогональную $X_1 \times X_2$. (Отличительным от прочих цветом и штриховкой выделен объём / мера c^4 , вычитаемая из d^4 .)

Заметим, что двумерные проекции на $X_1 \times X_2$ всех исследуемых в этом пункте подмножеств симметричны относительно $1D \perp X_3$ подпространств и соответственно $\perp X_4$ располагаются в плоскости симметрии $2D \parallel X_1 \times X_2$. См. Рис. 7.5 и Табл. 7.2.

Убедимся в возможности отыскания функции эквивалентности, отображающей $d^4 \setminus c^4 \rightarrow b^4 \cup a^4$. Свойство такого отображения помимо сохранения симметричности - сохранение меры (объёма). В самом деле, послойно можно записать:

$$\{ \{S_k | c \leq k \leq d\}, \{S_l | 1 \leq l \leq d\} \} \rightarrow \{ \{S_j | 1 \leq j \leq b\}, \{S_i | 1 \leq i \leq a\} \} \quad (1)$$

Здесь записано отображение множества, состоящего из двух подмножеств слоёв в другое множество, также состоящее из двух подмножеств слоёв (условие о диапазоне слоёв следует после вертикальной черты $|$). Отыскать соответствующую функцию эквивалентности можно, исходя из равенства мер $d^4 - c^4 = b^4 + a^4$, а также принимая

во внимание условие о послойной симметрии и Рис. 17.17. В результате можно записать формулу для кубоидов с учётом их высоты (см. аналог кабеля квадратного сечения на Рис. 7.5:

$$c \sum_c^d |S_k| + (d-c) \sum_1^d |S_l| = b \sum_1^b |S_j| + a \sum_1^a |S_i|$$

$$\frac{c}{d^2} \sum_1^{\frac{LCD}{d}} |S_m| d^2 + \frac{1}{d+c} \sum_1^{\frac{LCD}{d-c}} |S_m| (d^2 - c^2) = \frac{1}{b} \sum_1^{\frac{LCD}{b}} |S_m| b^2 + \frac{1}{a} \sum_1^{\frac{LCD}{a}} |S_m| a^2$$
(17.3)

Здесь в формуле выше LCD Least Common Divisor - математическое обозначение наибольшего общего делителя (формулы TeX воспринимают только латиницу) НОД($d-c, a, b, d$). Под знаком суммы записаны мощности 2D-слоёв. Многообразие в виде разности тессерактов ($d^4 \setminus c^4$ разбито на кубоиды, проецируемые на ось X_3 на отрезки $[c, d]$ и $[1, c]$ соответственно. (Сравните с разбиением многообразия на части при взятии интеграла).

В нижнем уравнении последней формулы происходит замена переменной на единый натуральный счётчик m , который пробегает значение диапазонов $1 \dots d, c \dots d, 1 \dots a, 1 \dots b$ соответственно для каждого множества слоёв. Задавая таким образом выражение, можно наглядно убедиться в последовательном отображении подмножеств слоёв исследуемой конструкции и отыскания отношения эквивалентности с соблюдением симметрии относительно вышеперечисленных подпространств. Легко убедиться, в возможности задания такого разбиения исследуемой конструкции, которое обеспечит работу не с дробными, а натуральными числами - для этого вместо НОД можно использовать просто произведение $(d-c) * a * b * d$ и отображать подмножества последовательно следующих слоёв мощностью (читай толщиной или числом интервалов) численно равных соответственно: $h_k = d^2, h_l = d^2 - c^2, h_j = b^2, h_i = a^2$, как на Рис.7.4.

В результате такого представления Фигура будет иметь симметрию второй степени и любые слои в ней окажутся соизмеримыми, что указывает на потенциальную возможность отыскать четыре гиперкуба с целочисленными рёбрами для приведенной формулы.

Описанный на последнем примере способ определения разрешимости является необходимым, но недостаточным условием для поиска положительного ответа на вопрос. А на примере ВТФ описанный способ является достаточным условием для формулировки вывода о неразрешимости данного Диофантова уравнения.

Приведенное ниже численное решение в целых, его обнаружил — американский математик, профессор математики Гарвардского университета Ноям Дэвид Элкис в 1988г.

[Xoa14]: Хоакин (2014), Неуловимые идеи и вечные теоремы. Великие задачи математики

[Пос21]: Постолиит (2021), «Основы искусственного интеллекта в примерах на Python»

[Xoa14]. Поскольку числа большие и электронная таблица из пакета офисных программ с ними не справится, текст листинга программы *Fermatsfamily.py* можно скопировать и запустить на Python (см. основы программирования на Python в [Пос21]), например в любом из популярных онлайн трансляторах :

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%               Fermats family.py
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a = 95800
b = 217519
c = 414560
d = 422481
print("")
print(' a = %d b = %d ; a^4 + b^4 = %d'
% (a, b, a**4 + b**4))
print(' c = %d d = %d ; c^4 - d^4 = %d'
% (c, d, d**4 - c**4))
```

Результат исполнения программы. Расчет суммы 4-х мерных гиперкубов:

```
a = 95800 b = 217519;
a^4 + b^4 = 2322892439815904960321
c = 414560 d = 422481;
c^4 - d^4 = 2322892439815904960321
```

как легко убедиться результаты вычисления правой и левой частей совпадают.

Вначале появилась потребность лишь в небольшом количестве иррациональных чисел, но требование ло-

гической стройности математики привело к построению всех действительных чисел. В частности, для стройности математической теории было очень важно, чтобы всякая **последовательность Коши** сходилась. Но для рациональных чисел это неверно. Последовательность Коши рациональных чисел может не сходиться к рациональному числу, она сходится к действительному числу. Таким образом, поле рациональных чисел нужно было дополнить до поля действительных чисел. отрицательные числа появились в основном из внутренних математических соображений для того, чтобы вычитание всегда было возможно, хотя отрицательные числа имели и практическое толкование. можно было толковать отрицательное число как долг [Пон86].

[Пон86]: Понтрягин (1986),
Обобщения чисел

18 Вывод

Интересно, что в теориях концентрических сфер древних греков Евдокса, Каллиппа и Аристотеля Земля находилась в центре Вселенной и была окружена симметричными сферами, которые считались идеально симметричными [Пто+98]. Но, оказывается, даже работая со своими симметричными сферами, легко убедиться, что эта конструкция не соответствует ни одному физическому объекту в природе. Такое явление в Древней Греции называли **апорией**, или логически непротиворечивыми конструкциями, которые ничему не соответствуют. Удивительно, что мы пришли к одному и тому же выводу и для случая работы с n -кубами, и с шарами!

[Пто+98]: Птолемей и др.
(1998), Альмагест: или математическое сочинение в тринадцати книгах

С философских позиций в Великой теореме Ферма заложен конфликт между содержанием (объёмом) вложенных друг в друга гиперкубов и их формой: условие о центральной симметричности и непрерывности следования слоёв. Можно добиться соответствия содержания в ущерб форме и наоборот. Этот конфликт преодолевается лишь в двумерном пространстве, где существуют Пифагоровы тройки, как редкое явление гармонии.

Это напоминает фундаментальное соотношение неопределённости Гейзенберга в квантовой механике, устанавливающий предел точности одновременного измерения

пары физических величин, описывающих систему, как например, импульс и положение частицы. Он нам понадобится в следующих главах 3 и 5 для доказательства АВС-гипотезы.

Абсолютно симметричная Вселенная невозможна. Для возникновения материи, возможности химических реакций и зарождения жизни необходимо оперировать понятием объёма/меры сохранением количества вещества. Эти условия обеспечиваются только в [слегка](#) асимметричном, анизотропном пространстве. При $n > 2$, такое невозможно в изотропном (центрально симметричном), однородном пространстве, что постулируется в аксиомах евклидовой геометрии. Глубинная природа этого противоречия вытекает из фундаментальных физических свойств нашей Вселенной. Если бы она была идеально симметричной, подобно изученной конструкции концентрических сфер, то в ней не могла бы возникнуть материя с присущими ей свойствами сохранения материи/меры.

Таким образом, исследуя Великую теорему Ферма, мы подошли к вопросам физики и мировоззрения, даже не применяя высшую математику, общую теорию относительности и сложные дифференциальные уравнения для иллюстрации принципов происхождения нашей Вселенной. Предположения, которые делались в рамках евклидовой геометрии, применительно к космическим масштабам, становятся неточными. Здесь уже работает [неевклидова](#) геометрия. В анизотропном пространстве конфликт между формой и содержанием изучаемых нами структур конструктивно разрешается, но для этого необходимо отказаться от геометрии Евклида!



Рис. 18.18: Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) — русский математик, один из первооткрывателей неевклидовой («гиперболической») геометрии, деятель университетского образования и народного просвещения.

Взгляните на портрет русского ученого Николая Ивановича Лобачевского, ректора Казанского университета, математика, который внимательно изучил пятый постулат Евклида, аксиомы которого мы рассматривали, и сформулировал свою, так называемую "воображаемую геометрию". Впоследствии эта геометрия была названа геометрией Лобачевского. Читатель может ознакомиться с геометрией Лобачевского [НВ04] и биографией этого необычного учёного в [Кол65].

[НВ04]: Н.В. (2004), Высшая геометрия. Учебник

[Кол65]: Колесников (1965), Лобачевский

Оказалось, что геометрия Лобачевского удивительно хорошо описывает понятие [пространственно-временной интервал](#), преобразование Лоренца. Отголоски Большого

взрыва проявляются в виде реликтового излучения, низкотемпературных фотонов с температурой 2,72 Кельвина, которые можно изучать с помощью новейшей аппаратуры и получать информацию об анизотропии нашей Вселенной.

И действительно, 1983-1984 годы российский реликтовый эксперимент подтвердил анизотропию реликтового излучения - "эха" Большого взрыва. Измерения проводились с помощью радиометра, разработанного в Институте космических исследований АН СССР, в группе Игоря Аркадьевича Струкова (общее руководство программой осуществлял академик Николай Семенович Кардашев) на запущенном спутнике "Прогноз-9". В 2006 году открытие российских ученых было "оценено по достоинству" присуждением Нобелевской премии по физике американцам Джорджу Смуту и Джону Мазеру за повторение результатов российских физиков, но с большей точностью. [Ску10] Имена российских ученых остались в тени.

Приведённое доказательство изложено с ориентацией на школьные знания. Для более глубокого знакомства с теорией простых чисел читатели могут обратиться к литературе: [AP87], [Пра], [Сиз07], [МП22] [Вин18], [Бор+85], [Кар83]

В этой литературе рассматриваются важные вопросы: простые и составные числа, арифметические функции, теория сравнений, первообразные корни и индексы, цепные дроби, алгебраические и трансцендентные числа, свойства простых чисел, теория диофантовых уравнений.

Кроме того, рекомендуются: [АО 62] [Бух13], [Тит53].

для понимания алгоритмических аспектов теории чисел с применениями в криптографии (проверка больших простых чисел на простоту, разложение больших чисел на множители, дискретное логарифмирование) и с использованием ЭВМ.

Впереди предстоит работа по развитию отечественной науки, инженерии и возрождению системы госрегистрации научных открытий, утраченной по реш. от 14 мая 1991г. N 156 Президиума Академии наук СССР. В этой остро стоящей ситуации автор был вынужден продолжить

[Ску10]: Скулачёв (2010), «Корреляция данных по анизотропии реликтового излучения в экспериментах WMAP и "Реликт-1"»

[AP87]: Аэрленд и др. (1987), Классическое введение в современную теорию чисел

[Пра]: Прахар (), Распределение простых чисел

[Сиз07]: Сизый (2007), Лекции по теории чисел

[МП22]: Манин и др. (2022), Введение в современную теорию чисел

[Вин18]: Виноградов (2018), Основы теории чисел

[Бор+85]: Борович ЗИ и др. (1985), Теория чисел

[Кар83]: Карацуба (1983), Основы аналитической теории чисел

[АО 62]: АО Гельфонд (1962), Элементарные методы в аналитической теории чисел

[Бух13]: Бухштаб (2013), Теория чисел

[Тит53]: Титчмарш (1953), Теория дзета-функции Римана

исследования по поиску кратких, доступных для понимания широкой аудитории, доказательств АВС-гипотезы, из которой также следует доказательство ВТФ.

Скептики продолжают считать, что Пьер де Ферма, вероятнее всего, заблуждался. Между тем, последовательное применение основных принципов физики, геометрии заставляют думать иначе. Работа над теоремой Ферма придала импульс развитию теории чисел, которая также описывает законы физического мира, но опосредовано. Смена парадигмы позволяет увидеть эту связь в наглядном представлении. Драматическая история открытия теоремы Ферма и поиск наглядных доказательств должны стать частью школьной / вузовской подготовки.

19 Дискуссии

В ходе доказательства ВТФ математическими методами физические законы помогли в поиске подобно нити Ариадны. [Авд23].

[Авд23]: Авдыев (2023), «Великая головоломка, как индикатор суверенизации Российской науки»

Провести обсуждение можно на форуме [Сообщество ВК Физика для менеджеров](#)

Здесь на Рис. 19.19 приведены авторские графические рисунки - содержимое таблиц Базы данных для ЭВМ, [Авд20] - Роспатент внёс и свою лепту в популяризацию математических знаний

[Авд20]: Авдыев (2020), «Базы данных для ЭВМ Доказательство теоремы Ферма для Миллиардов на основе школьных знаний 11.03.2020»

Fermat's Last Theorem for billions



was formulated in 1637, has been proved in 2020

$$a^n + b^n \neq c^n$$

For whole numbers $\neq 0$ and $n > 2$

© Marat Avdyev SCM 2020

Such a Figure doesn't exist!

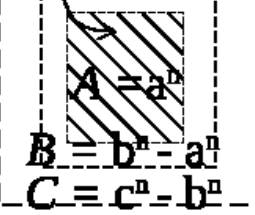
$$c^n - b^n \neq a^n \text{ in } \mathbb{Z}^n$$

set of S_i layers
dim = n-1

n-dim
n-cube

The logic law of excluded 3-d
Central symmetry of S_i
XOR continiosity for $n \geq 3$

3 hypercubes nested within each other



$A = a^n$
 $B = b^n - a^n$
 $C = c^n - b^n$
 $V_A = V_C?$

Homogeneity of space $\Rightarrow$
Circulation of unit cubes.

$$S_i \equiv S_j \equiv \sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k \cdot 1^{n-k} (i^k \equiv j^k)$$

$$\begin{cases} i^{n-1} = j^{n-1} + (j-1)^{n-1} + \dots \\ i^{n-2} = j^{n-2} + (j-1)^{n-2} + \dots \\ \dots \end{cases}$$

Unresolvable in $\mathbb{R}$ for $n > 2$

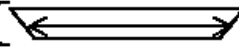
$S_i \neq S_x \pm S_{k-1}$ $S_i \neq \alpha S_j$ for $n \geq 3$

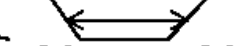
c^n is inhomogeneous in $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 3$

$S_i = e_{i+1} \setminus e_i$ where
 $e_{i+1} = (i+1)^n$
 $e_i = i^n$ - integer $e_0 = 2^n$ or 1^n
 $e_0 \leq e_1 \leq e_2 \dots \leq e_i \leq U = c^n$
 $e_0 \cup S_1 \dots \cup S_k \cup S_{k+1} \dots \cup S_{k+i}$
 $\cup S_{k+i+1} \dots \cup S_{k+i+m}$ - Remove?!
 $S_i \equiv (i+1)^n - i^n \equiv \sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k i^k \cdot 1^{n-k}$

For $\forall$ trapezoids $\{\dots S_i \dots\}$
 $\{\dots S_i \dots\} \exists i, j$ and scale q

$$a^n q^n + b^n q^n \neq c^n q^n$$

h_i {  }

h_j {  }

$V_i = l_i h_i = V_j = l_j h_j$

Hypercube = $2n$ regular hyper pyramids
 c^n is homogeneous in $\mathbb{Z}^n$
for $n = 2$ but not for $n \geq 3$

Рис. 19.19: Шести граней куба достаточно для доказательства ВТФ.

Дзета-функция Римана

3 | Дзета-функция Римана

1	Введение	52
1.1	Бесконечность числа нетривиальных нулей	53
2	С позиции физики	58
2.1	Важные предпосылки	58
2.2	Фазовое пространство и энтропия	61
2.3	Статистический вес и плотность состояний	63
3	Алгебра и симметрия	68
3.1	Группы симметрии. Характеристики	72
4	Распределение Гиббса и Дзета-функция	77
4.1	Статсумма и статвес	79
4.2	Ортогональность, непроводимость и p -число	87
5	О квантовой природе p -чисел	90
6	ζ -функция есть $\otimes$ всех Z -сумм	97
6.1	Абелева группа и статматрица	101
6.2	Формула Планка	102
7	Заключение	105

1 Введение

Гипотеза Римана — одна из важнейших нерешённых математических проблем. В этой работе рассматривается доказательство гипотеза Римана о так называемых нетривиальных нулях дзета-функции. Дзета-функция Римана играет важную роль в аналитической теории чисел, имеет приложения в теоретической физике, теории вероятностей и математической статистике. Автор убеждён, что верифицировать гипотезу Римана следует с позиции физики, квантовой механики, обращения к Стандартной модели Вселенной, симметрии и алгебре. В наш век базовые представления по этим предметам даются в школе. Простые числа - это математическая модель возможности выделения (обособленности) подсистемы в составе системы. Хотя формулы, определяющие дзета-функцию и её свойства, несколько громоздки и требуют знаний высшей математики, теории аналитических функций, теории чисел, но главная идея доказательства опирается преимущественно на знания принципов физики, математики, логики, изучаемые в школе.

С ориентацией на широкую читательскую аудиторию, включая старшеклассников, в этой работе знаком курсива / цветом выделены специальные термины, которые легко могут быть найдены в научной литературе. Междисциплинарный характер исследования и конфликт в используемых обозначениях, как например, p -вероятность и p - импульс, p - простое число побудил автора декларировать в начале каждого раздела основные локальные переменные, функции с тем, передать, в каком смысле подразумевается их использование.

Наиболее характерным свойством дзета-функции Римана $\zeta(s)$ является тождество, которое может быть записано

двумя формулами. Первая из них представляет собой бесконечную сумму [ряд Дирихле](#) вида:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1.1)$$

где подразумевается сходимость ряда для s (вопрос о сходимости рассматривается ниже), а n пробегает все натуральные числа. Вторая формула определяет $\zeta(s)$ -функцию в виде бесконечного ряда произведений:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} \dots\right) \quad (1.2)$$

в этой формуле p пробегает все простые числа. (В случае сходящегося ряда 1.1, легко рассмотреть его частичные суммы, применить ассоциативный закон и произвести арифметические операции с простыми числами, отбрасывая члены младшего порядка). Эйлер доказал [\[Чан74\]](#) эквивалентность обоих определений для случая целых s .

[\[Чан74\]](#): Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

Как аналитическую функцию от аргумента - комплексной переменной $s = \sigma + it$, впервые $\zeta(s)$ начал изучать Риман [\[Рим48\]](#). Выяснилось, что $\zeta(s)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, включая отрицательные значения σ , причём не имеет на ней особенностей кроме $s = \frac{1}{2} + it$ - [полюса первого порядка](#).

[\[Рим48\]](#): Риман (1948), Риман Бернгард. Сочинения. Перевод с нем. под ред. В.Л.Гончарова.

$\zeta(s) = 0$ обращается в ноль в области $(-2, -4, -6 \dots)$ отрицательных значений σ - это так называемые [тривиальные нули](#). Особый научный интерес представляет поиск [нетривиальных](#) нулей $\zeta(s)$ -функции. В сформулированной Риманом гипотезе утверждается, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ расположены на мнимой оси $s = \frac{1}{2} + it$.

1.1 Бесконечность числа нетривиальных нулей

В данной секции используются Γ в значении Гамма функции, $\psi(x)$, χ , Ξ - специально определенные Риманом функции, для

упрощения выражений и T - интервал для переменной t по мнимой оси на $\mathbb{C}$.

Функция комплексного переменного называется **регулярной** (однозначной аналитической в точке), если она определена в некоторой окрестности этой точки и представима в некотором круге сходящимся к ней степенным рядом. Верно следующее функциональное уравнение [Tit86], вид которого сначала может показаться слишком сложным:

[Tit86]: Titchmarsh (1986), The theory of the Riemann zeta-function

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s) \quad (1.3)$$

из-за используемой здесь **гамма-функции Эйлера** в более привычной для современников форме, разработанной Лежандром:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (1.4)$$

Этот интеграл легко берется по частям и сводится к интегралу аналогичного вида — в итоге получается рекуррентное соотношение $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Для школьников достаточно вспомнить определение факториала числа $n!$, чтобы лучше познакомиться с гамма-функцией и её свойствами. Исходя из 1.4 путем двойной замены переменных вытекает следующая формула:

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha \exp(-at^\beta) dt = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \quad (1.5)$$

подставляя $a = -n^2\pi$ и $\beta = 1$ и $\alpha = \frac{s}{2} - 1$, приходим к следующему выражению:

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^s \pi^{s/2}} \quad (1.6)$$

Поскольку ζ -функция может быть **аналитически продолжена** на всю плоскость $s = \sigma + it$ при $\sigma > 1$, вынося константу из под знака суммы получим из предыдущей формулы:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)}{\pi^{s/2}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{s/2}} \sum_0^\infty \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x} dx \quad (1.7)\end{aligned}$$

Здесь произведена перемена порядка суммирования и интегрирования, допустимая для абсолютно сходящегося ряда. Риман выделяет в отдельную функцию

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x} \quad (1.8)$$

и упрощает выражение:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx, \sigma > 1 \quad (1.9)$$

Из 1.8 с помощью известной формулы для [Гауссова интеграла](#) $\int_0^\infty e^{-ky^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}$ получим:

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ 2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right\} \quad (1.10)$$

[[Tit86](#)]: Titchmarsh (1986), The theory of the Riemann zeta-function

Титчмарш из последней формулы сделал вывод о связи между производной и самой функцией [[Tit86](#)], в чём нетрудно убедиться непосредственно, упрощая выражения, полученные в ходе дифференцирования, путём замены переменной на её значения $x = 1$:

$$4\psi'(1) + \psi(1) = -\frac{1}{2} \quad (1.11)$$

Таким образом из 1.9 и 1.10 вытекает формула:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)}{\pi^{s/2}} &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}}\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right\} dx + \int_1^\infty \psi(x)dx \\
&= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(x)dx \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Риман обратил внимание на симметричность вхождения сомножителей s и $s-1$ в полученной формуле, из чего сделал вывод о том, что нули ζ должны располагаться симметрично относительно оси $\sigma = \frac{1}{2}$ на $\mathbb{C}$. Из полученных формул 1.10 и 1.11 путём замены $s = \frac{1}{2} + it$ Бернгард Риман легко получил выражение:

$$\Xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \ln(x)\right) dx \quad (1.13)$$

Также для упрощения работы с выражением 1.3 Риман специально ввёл функцию $\chi(s)$ согласно выражению $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$, при этом

$$\chi = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \quad (1.14)$$

Следовательно, $\chi(s)\chi(1-s) = 1$. В соответствии с формулами 1.3, 1.14 выше, если положить:

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad (1.15)$$

то можно вывести симметричное выражение для функции:

$$\xi(s) = \xi(1-s) \quad (1.16)$$

Далее Риман осуществил замену переменной, повернув оси плоскости $\mathbb{C}$ на угол $\frac{\pi}{4}$:

$$\Xi(z) = \xi\left(\frac{1}{2} + iz\right) \quad (1.17)$$

Таким образом, функциональное уравнение 1.3 эквивалентно утверждению о чётности функции $\Xi(z)$.

В Главе XI [Рим48] О числе простых чисел, не превышающих данной величины Риман приходит к выводу о том, что функция ξ может обращаться в нуль только в том случае, если мнимая часть t заключена между $-\frac{i}{2}$ и $\frac{i}{2}$, а число корней уравнения, действительная часть которых заключена между 0 и T приблизительно равно:

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \quad (1.18)$$

Риман пишет: ‘в указанных в пределах содержится примерно столько действительных корней; представляет весьма вероятно что и все корни являются действительными. Во всяком случае было бы желательно найти строгое доказательство второго предложения; после нескольких напрасных не очень настойчивых попыток разыскать таковое, я временно от них отказался, так как для ближайшей цели моего исследования в этом не представлялось надобности’.

Исходя из биографии Римана, хорошо описанной в [Дер10], закономерно предположить, что Риман сделал много настойчивых попыток доказать сформулированную им Гипотезу, но исходя из уровня развития физики середины XIX доказать её было невозможно.

Вывод Римана также подтверждает Титчмарш путём анализа следующего интеграла [Тит86], [Тич53]:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \operatorname{ch}(\alpha t) dt = \frac{(-1)^n \pi \cos \frac{\pi}{8}}{2^{2n}} \quad (1.19)$$

где $n = (0, 1, 2 \dots N)$ имеет столько же нулей, сколько и последовательность $(-1)^n$ для достаточно больших $a = a(N)$ и достаточно близких $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}$. Следовательно, на интервале $(0, a)$ функция $\Xi(t)$ имеет по меньшей мере N

[Рим48]: Риман (1948), Риман Бернгард. Сочинения. Перевод с нем. под ред. В.Л.Гончарова.

[Дер10]: Дербишир (2010), Простая одержимость : Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике / Д. Дербишир ; Джон Дербишир ; пер

[Тит86]: Titchmarsh (1986), The theory of the Riemann zeta-function

[Тич53]: Тичмарш (1953), «Дзета-функция Римана»

перемен знака. Устремляя $N \rightarrow \infty$ Риман сделал вывод о бесконечности числа нетривиальных нулей.

Таким образом, в сформулированной Риманом гипотезе утверждается, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ расположены на мнимой оси $s = \frac{1}{2} + it$. Но подтвердить либо опровергнуть это утверждение ещё никому не удалось несмотря на настойчивые усилия математиков с использованием суперкомпьютеров и распределенных вычислений. Найден алгоритм [Одлыжко — Шёнхаге](#) для вычисления дзета-функции Римана вплоть до 10^{20} ([The \$10^{20}\$ -th zero of the Riemann zeta function and 175 million of its neighbors](#)) см. также [\[OS88\]](#).

[\[OS88\]](#): Odlyzko и др. (1988), «Fast algorithms for multiple evaluations of the Riemann zeta function»

Между тем с момента формулировки гипотезы Римана в 1859 году в физике были сделаны важные открытия, многократно подтвержденные экспериментами. И эти знания помогут отыскать доказательство гипотезы Римана.

2 С позиции физики

Можно отметить работы физика из США, где с опорой на знания физики элементарных частиц он раскрывает соответствие между элементарными частицами и нетривиальными нулями $\zeta(s)$ - функции, вводит свою мероморфную функцию, упрощающую исследования [\[Rem21\]](#). Такие аналогии продуктивны. Вместе с тем, по мнению автора, общие идеи доказательства гипотезы Римана можно почерпнуть из школьных знаний: общего курса физики, астрономии, математики, алгебры и логики. (Опуская строгие основания, школьниками можно сразу перейти к секции [Формула Планка](#) для понимания идей доказательства 6.1.)

[\[Rem21\]](#): Remmen (2021), «Amplitudes and the Riemann Zeta Function»

2.1 Важные предпосылки

В данной секции используются обозначения: L - функция Лагранжа S - классическое действие s - число степеней свободы, q, p - обобщенные координаты и импульс, T - температура Γ - объём фазового пространства n_0 - концентрация частиц в заданной точке.

[\[Osi04\]](#): Osipov (2004), Большая российская энциклопедия

Согласно [\[Osi04\]](#) Верификация (от лат. verificatio – дока-

зательство, подтверждение, от лат. *verus* – истинный и *facio* – делать) – это понятие, употребляемое в эпистемологии, логике и методологии науки для обозначения процессов установления истинности научных утверждений в результате их эмпирической проверки. Такая проверка возможна путём постановки физического эксперимента, наблюдения явления, измерения и взаимодействия инструмента наблюдения с изучаемым объектом.

Хотя научный интерес может представлять построение математических моделей для которых в известном физическом мире аналогов не существует [Ван79], но в данной работе будет доказана гипотеза Римана от противного: если бы нетривиальные нули $\zeta(s)$ были расположены вне мнимой оси $s = \frac{1}{2} + it$, то это противоречило бы основополагающим законам физики, квантовой механики, аксиомам арифметики, абстрактной алгебры.

[Ван79]: Ван дер Варден (1979), Алгебра

Стандартная модель содержит ряд частиц, каждая из которых является возбуждением определённого поля. В нашей Вселенной взаимодействие осуществляется с помощью частиц / волн, имеющих амплитуду и фазу. Волны интерферируют между собой. Явление интерференции, дифракции известно школьникам старших классов.

Корпускулярно-волновой дуализм, изучаемый в школе — это свойство природы, состоящее в том, что материальные микроскопические объекты могут при одних условиях проявлять свойства классических волн, а при других — свойства классических частиц.

Переносчик взаимодействия

Частица-переносчик, промежуточная частица, обменная частица — это тип частицы в квантовой теории поля, которая порождает силы между другими частицами. Эти частицы служат квантами определённого вида физического поля. Квантовые теории поля описывают природу в терминах квантовых полей. Силу между двумя частицами можно описать либо как действие силового поля, создаваемого одной частицей в координатах другой частицы, либо как обмен виртуальными частицами-переносчиками силы между ними.

Если функция Лагранжа данной механической системы

известна, то уравнение Лагранжа:

$$\frac{dL}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2.1)$$

устанавливает связь между ускорениями, скоростями и координатами, тем самым представляя собой уравнения движения системы. систему s уравнений второго порядка для s неизвестных функций $q_i(t)$. Для простоты далее s координат $q_1, q_2 \dots q_s$ просто обозначается q . Общее решение такой системы содержит $2s$ произвольных постоянных. Для полного определения движения механической системы необходимо задать начальные условия: все координаты q и скорости $\dot{q}$.

Для системы, состоящей из невзаимодействующих, но делящих общий ресурс подсистем (подробнее об этом сказано ниже), функция Лагранжа системы равна сумме функций Лагранжа подсистем.

Полная производная от действия равна функции Лагранжа определяется путём взятия производной от действия S :

$$\frac{dS}{dt} = L \quad (2.2)$$

Ниже будет использовано также Уравнение Гамильтона-Якоби первого порядка, где частные производные от действия S по координатам совпадают с импульсами $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$:

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.3)$$

Выбор обобщенных координат q совершенно свободен, ими могут быть любые s величин, однозначно определяющие положение системы в пространстве [Лан04].

[Лан04]: Ландау (2004), Теоретическая физика. Том 1. Механика

Каждая точка фазового пространства отвечает определенному состоянию системы в обобщенных координатах (p, q) . В ходе эволюции системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве некоторую фазовую траекторию. Для системы, совершающей одномерное финитное движение и характеризующуюся некоторым параметром α , определяющим свойства самой системы (внешнего поля, в котором система находится). Когда этот параметр медленно меняется со временем, т.е. за

время периода движения системы, тогда такое изменение считается **адиабатическим**. В этом случае интеграл:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad (2.4)$$

взятый по траектории движения при заданных p и параметра q . Величина I остается в рассматриваемом приближении постоянной при изменении параметра q , т.е. является **адиабатическим инвариантом**. Несложно по аналогии доказать инвариантность интегралов:

$$\iint \sum_i dp_i dq_i \quad (2.5)$$

$$\iiint \sum_{i \neq k} dp_i dq_i dp_k dq_k$$

в которых интегрирование производится по заданным двум-, трёх-, четырех- и т.д. -мерным многообразиям в фазовом пространстве (счетчик i - нумерует подсистему в составе исследуемой системы). Наряду с действием - фазовым объёмом при адиабатическом изменении сохраняются и другие термодинамические переменные: энергия, число частиц, энтропия, свободная энергия, энтальпия, термодинамический потенциал.

Это наталкивает на мысль о наличии связи между инвариантами исследуемых подсистем в составе системы и простыми числами.

2.2 Фазовое пространство и энтропия

Известные формулы распределения **плотности вероятности** нахождения частиц изучаются в физматемат-школах [ЛЛЛ69], это распределение Больцмана $n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$, т. н. **барометрическая формула** и **распределении Максвелла** в координатно-импульсном представлении q, p (для школьников более привычна формула, выраженная через скорости):

$$dw = \left(\frac{m}{2\pi\hbar k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2mk_B T}} dp_x dp_y dp_z \quad (2.6)$$

[ЛЛЛ69]: Ландау и др. (1969), Курс общей физики. Механика и молекулярная физика

Микросостояние - это конкретная конфигурация системы, которая описывает точные положения и импульсы всех отдельных частиц, составляющих систему. Каждое микросостояние имеет определенную вероятность возникновения в процессе движения молекул. **Макросостояние** системы относится к ее макроскопическим свойствам, например такими свойствами являются температура, давление, объем и плотность.

Обе формулы дают представление о **статистическом ансамбле**, который следует рассмотреть детальнее. (Далее по тексту температура T задается в энергетических единицах и постоянная Больцмана k_B) опускается, как это принято в традициях теоретической физики $k_B T \rightarrow T$ 1 электрон-вольт = 11606 град. Аналогично постоянная Больцмана ниже опускается в формулах для выражения энтропии S).

Принцип равной вероятности заключается в том, что в изолированной системе, находящейся в состоянии теплового равновесия, каждое микроскопическое состояние, принадлежащее совокупности реализуется с одной и той же вероятностью.

Для совокупности двух подсистем распределение ρ_{12} выражается как произведение функций распределения ρ_1 и ρ_2 отдельных подсистем, при этом $\rho_{12} = \rho_1 \rho_2$ Применяя натуральный логарифм к обеим частям уравнения, получим:

$$\ln \rho_{12} = \ln \rho_1 + \ln \rho_2 \quad (2.7)$$

что демонстрирует аддитивность логарифма функции распределения. Из этого следует, что логарифм функции распределения не только является интегралом движения (величиной, сохраняющейся во времени), но и обладает свойством **аддитивности** $\Rightarrow$ для составной системы значение логарифма функции распределения равно сумме соответствующих величин для её подсистем. Такое свойство играет ключевую роль в статистической механике при анализе сложных систем.

Статистический ансамбль, определяемый принципом равной вероятности микроскопических состояний, или, более точно, распределением вероятности вида 2.13 называется **микроканоническим ансамблем**, а распределение — **микроканоническим распределением**. Таким образом, микроканонический ансамбль описывает изолированную систему, которая достигла состояния теплового равновесия.

Принцип неопределённости Гейзенберга

Принцип неопределённости Гейзенберга выражается в формуле: $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$ Он проявляется и на макро-

уровне в преобразованиях Фурье, в спектрах и сигналах: невозможно одновременно сузить полосу спектр и длительность сигнала - см. [Хар62]

[Хар62]: Харкевич (1962), Спектры и анализ

Множество микроскопических состояний в квантовой статистической механике образует дискретную счетную совокупность квантовых состояний, определяемых квантовым числом l (В статистической механике обычно рассматривают системы, ограниченные в пространстве, так что квантовое число l дискретно. Системы с неограниченными размерами рассматриваются как предельный случай конечных систем.)

В основе статистической физики лежит постулат [равновесности микросостояний](#), являющийся развитием принципа симметрии.

2.3 Статистический вес и плотность состояний

Поскольку потенциальная энергия определяется в точности до постоянной, упорядочим значения энергетические уровни по возрастанию и считаем их положительными.

Каждая точка данного участка фазового пространства перемещается со временем согласно уравнениям движения рассматриваемой механической системы. Тем самым будет перемещаться и весь участок. При этом функция распределения остается постоянной вдоль фазовой траектории подсистемы. Для квазиклассического случая, где законы квантовой механики можно заменить уравнениями Гамильтона, которые являются переформулировкой хорошо известных из школы уравнений Ньютона.

Рассмотрим следующий дифференциал:

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi\hbar)^s} \quad (2.8)$$

$$\Delta\Gamma_0 \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^s}$$

Величину $\Delta\Gamma$ называют [статистическим весом](#) микроскопического состояния подсистемы, а ее логарифм — энтропией [Лан02]. (В нижней строке только что приведенных формул выражение Γ_0 характеризует дискретность пространства, его оценка сделана из принципа неопределённости). Определим плотность вероятности ρ нахождения частицы в окрестности заданной точки r :

[Лан02]: Ландау (2002), Теоретическая Физика В 10т. Том 5. Статистическая Физика.

$$\rho(r, t) = |\Psi(r, t)|^2 \quad (2.9)$$

и запишем условие нормировки по всему многообразию $\mathcal{M}$ с учётом только что определённой вероятности:

$$\sum_{\mathcal{M}} \rho(\bar{E}) \Delta q \Delta p = 1 \quad (2.10)$$

[Ку607]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

Число квантовых состояний, лежащих в интервале энергии $\bar{E} \in (E, E + \delta E)$ обозначается как $d\Gamma$ (у Р. Кубо введено обозначение [Ку607] $\Omega_0 \rightarrow \Gamma, \Omega \rightarrow \Delta\Gamma$, которые представляется неудачным в силу обозначения указанной литерой **термодинамического потенциала** в отечественной литературе).

В свою очередь, энтропия определяется через среднее значение, обозначаемого скобками $\langle \rangle$, логарифма $\Delta\Gamma$ как для случая описания исследуемой системы с позиции её квантового состояния от функции распределения плотности вероятности по энергии E_i , так и в квазиклассическом подходе от плотности вероятности, по формулам:

$$S = - \langle \lg w(E_i) \rangle = - \sum_i w_i \ln(w_i) \quad (2.11)$$

$$S = - \langle \ln [(2\pi\hbar)^s \rho] \rangle = - \int \rho \cdot \ln [(2\pi\hbar)^s \rho] dp dq \quad (2.12)$$

За счет введения постоянной Планка $\hbar$ значение энтропии в классическом случае перестает зависеть от выбора единиц измерения.

Определенная таким образом энтропия, как и сам статистический вес есть безразмерная величина. В последней формуле введена постоянная Планка $\hbar$, имеющая принципиально важное значения для определения энтропии в классической статистике.

Простой вид формулы 8.1 в действительности не отражает всей сложности при подсчёте статистического веса. Статистический вес тесно связан с симметрией исследуемой системы, приводимыми представлениями группы симметрии, которые в общем случае могут подчиниться правилам тензорного произведения 5.2. Поэтому наряду с приведенной рассмотрим альтернативное определение, на которое будем опираться в дальнейшем.

Пусть многообразие $\mathcal{M}$ является совокупностью всех возможных микроскопических состояний, в которых может находиться система при заданных макроскопических условиях. В классическом случае $\mathcal{M}$ является определенным подпространством фазового пространства, а в квантовомеханическом — совокупностью квантовых состояний системы. Вероятность реализации данных микроскопических состояний системы определяется вероятностью того, что одно из микроскопических состояний реализуется в элементе объема $\Delta\Gamma$ фазового пространства:

$$\begin{aligned} Pr(\Delta\Gamma) &= \int_{\Delta\Gamma \in \mathcal{M}} w(q, p) d\Gamma \\ Pr(l) &= w(l), \quad (l \in \mathcal{M}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

(где Pr - сокращенное от *Probability*). Формулы приведены для классического и квантово-механического случая соответственно. [Ку607].

[Ку607]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

Выбрав систему отчета с покоящимся центром масс (полный импульс момента импульса равны нулю), выразим статистический вес через энергию по формуле:

$$\Delta\Gamma = \frac{d\Gamma(E)}{dE} \Delta E \quad (2.14)$$

Выше через $\Delta\Gamma(E)$ обозначается число квантовых состояний со значением энергии E' в интервала $E \leq E' \leq E + \delta E$. Величину $\Delta\Gamma$ называют **статистическим весом** микроскопического состояния системы, а ее логарифм S — энтропией.

Распределение вероятностей по энергии задаётся выражением:

$$W(E) = \frac{d\Gamma(E)}{dE} w(E). \quad (2.15)$$

Интеграл по всем вероятностям состояний подсистемы образует **полную группу событий** $\Rightarrow$ условие нормировки

для функции плотности вероятности $W(E)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} W(E) dE &= 1 \\ \sum_l W \Delta \Gamma &= \sum_{i=1}^{i=k} \sum_l W_{i,l} \Delta \Gamma_{i,l} = 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

для классического и квантово-механического случая соответственно, причём в нижней формуле суммирование происходит по квантовым состояниям l , сгруппированным по каждой из подсистем $1, 2 \dots k$ входящих в исследуемую систему. Напомним, что многообразие $\mathcal{M}$ является совокупностью всех возможных микроскопических состояний, в которых может находиться система при заданных макроскопических условиях, квантовое число l счетчик дискретной совокупности квантовых состояний.

Полное число микросостояний Γ является функцией от энергии исследуемой системы E , числа частиц в этой системе N , объема V и некоторого параметра X , как например напряженности электромагнитного / гравитационного поля:

$$\begin{aligned} \Gamma(E, N, V, X) &= \frac{\int_{H \leq E} d\Gamma}{(2\pi\hbar)^{3(N_a+N_b+N_c \dots)} N_a! N_b! N_c! \dots} \quad (2.17) \\ \Gamma(E, N, V, X) &= \sum_{0 < E_l < E} 1 \end{aligned}$$

для классического и квантово-механического случая соответственно. В обеих формулах многообразие $\mathcal{M}$ в фазовом пространстве и собственные значения H - гамильтониана системы рассматривается для диапазона энергий $E < H < E + \delta E$.

Заметим, что в квантовой механике тождественные частицы неразличимы - это **симметрия относительно перестановок одинаковых частиц**. Поэтому результат от интегрирования по фазовому объему делится на число перестановок по формулам комбинаторики - так объясняется появление сомножителей вида $N_a! N_b! N_c! \dots$ в знаменателе.

Выразим дифференциал для функции распределения вероятности в фазовом пространстве и плотность вероятности ρ обнаружить объект в заданных координатах фазового пространства через очевидную формулу:

$$dw = \rho(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s) dp dq = e^{-\frac{E(p,q)}{T}} dp dq \quad (2.18)$$

- вероятность отыскать исследуемый объект в заданных бесконечно малых интервалах s координат и s импульсов в пределах: $q_i \dots q_i + dq_i, p_i \dots p_i + dp_i$. - сокращённо в формуле 2.18 и далее по тексту это обозначается как $dp dq$ и рассматривается как «элемент объема» фазового пространства $\Delta\Gamma$. При этом плотность вероятности выражается через энергию системы $\rho = e^{-\frac{E(p,q)}{T}}$.

Снова, существенно упрощая изложение, избегая общий случай тензорного произведения представлений групп симметрии, рассмотренный ниже, рассмотрим замкнутую систему в целом (т.е. изолированную от иных систем, например, помещенную в термостат), где определены $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3 \dots$ — статистические веса ее различных подсистем. Если каждая из k подсистем, образующих вместе исследуемую систему, может находиться в одном из $\Delta\Gamma_\alpha$ состояний, то фазовые объемы состояний перемножаются, а соответствующие **энтропии** складываются, что иллюстрируют выражения:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma &= \prod_{\alpha} \Delta\Gamma_{\alpha} \\ S &= \sum_{\alpha} S_{\alpha} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Другими словами, функция, описывающая фазовое пространство **мультипликативна** и допускает **разделение переменных** по подсистемам в составе исследуемой системы.

Свойство **аддитивности** является важным свойством энтропии (наряду с другими термодинамическими переменными: энергия, число частиц, энтальпия, свободная энергия, термодинамический потенциал).

Пусть, что в исследуемой системе наблюдается физическая величина (наблюдаемая). С микроскопической точки зрения есть динамическая величина и является

функцией микроскопических переменных. В классической механике микроскопическое значение наблюдаемой определяется функцией от обобщённых координат фазовой точки, а в квантовой механике среднее значение такой наблюдаемой выражается следующим образом: .

$$A(l) = \int \phi^* A \phi d\tau = \langle l|A|l \rangle \quad (2.20)$$

Итак, фазовое пространство дискретно 8.1 и является мультипликативной функцией от обобщенных координат. Здесь выполняются принципы мультипликативности фазового объема 2.19 аддитивности энтропии. См. также Приложение 12 {Пространство Лебега, Гильберта. Операторы.

3 Алгебра и симметрия

Как и в классической механике наличие [интегралов движения](#) тесно связано с симметрией квантово-механической системы. Пусть система [инвариантна](#) относительно некоторого преобразования $\hat{U}$, при этом физический смысл имеют лишь унитарное образование, сохраняющие нормы векторов и свойства эрмитовости операторов. Поскольку динамика системы определяется её [гамильтонианом](#), свойство инвариантности означает, что при таком преобразовании H

$$\hat{H}' = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^{-1} = \hat{H} \quad (3.1)$$

(Для случая классической механики аналогично применимы [скобки Пуассона](#)) Другими словами, оператор $\hat{U}$ коммутирует с гамильтонианом $\hat{H}$, а их [коммутатор](#) равен нулю:

$$[\hat{U}, \hat{H}] = \hat{U} \hat{H} - \hat{H} \hat{U} = 0 \quad (3.2)$$

Если оператор $\hat{U}$ не содержит времени, то ему должен отвечать некоторый закон сохранения. Тогда собственный вектор Ψ_E гамильтониана $\hat{H}$ имеющий определённую энергию E , при преобразовании $\hat{U}$ переходит в вектор Ψ'_E , обладающий той же энергией $\Psi'_E = \hat{U} \Psi_E$.

Любой оператор $\widehat{Q}$ выражается через

$$\langle n|\widehat{Q}|m\rangle = \int \psi_n^* \widehat{Q} \psi_m dq \quad (3.3)$$

Если $\widehat{Q}$ явно не зависит от времени и коммутирует с гамильтонианом, его матричные элементы $\langle n|\widehat{Q}|m\rangle$ не меняются со временем. Это квантовая форма **интегралов движения** - величин, сохраняемых при **канонических преобразованиях**: импульс, момента импульса, объем фазового пространства при адиабатическом изменении и др. Важно отметить, что для нашего случая все собственные значения λ т.е. энергии микросостояний вещественны, то это означает что оператор H **эрмитов** $H = H^*$. Замечательное свойство эрмитовости оператора обеспечивает коммутативность гамильтониана с рядом операторов.

Как известно, физическое измерение в квантовой механике соответствует воздействию оператора физической величины на вектор состояния системы. Так называемые **чистые состояния**, в которых физическая величина имеет строго определённое значение, соответствуют собственным векторам, при этом значение величины в данном состоянии — это собственное число вектора чистого состояния.

Преобразование G устанавливает взаимнооднозначное соответствие между динамическими переменными: заданная переменная B преобразуется в новую переменную B' . По предположению образ B' имеет тот же **спектр**, что и B , а собственные состояния для каждого собственного значения переменной B' являются образами собственных состояний, соответствующих тому же собственному значению переменной B . Эти два условия выражают требование сохранения физических свойств при преобразовании динамических переменных. Как правило, в физических приложениях оператор G линеен, за исключением оператора обращения времени (пример **антилинейного** оператора). Различные преобразования, встречающиеся в физике, образуют определенные **группы преобразований**. Каждой такой группе преобразований $\mathcal{G}$ сопоставляется группа G операторов, реализующих эти преобразования.

Definition 3.1 Принято называть некоторую совокуп-

ность преобразований группой преобразований, если она вместе с любыми двумя преобразованиями содержит преобразование, получающееся в результате их последовательного выполнения, и вместе с каждым преобразованием содержит обратное преобразование.

Пусть имеется $\mathcal{G}$ группа преобразований $g_1, g_2, g_3 \dots$ и каждому элементу g_i , этого множества можно сопоставить оператор $\hat{T}(g)$, определяющий преобразование векторов и операторов в пространстве состояний. Оператор $\hat{T}(g)$ - это **представление группы**, он задается своими физическими свойствами только с точностью до фазового множителя $e^{i\alpha}$. Мы получим множество $[T]$ операторов преобразования, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами из группы $\mathcal{G}$. А именно, для каждого произведения $g_k = g_i g_j$ имеем:

$$T_k = e^{i\alpha_j^k} T_i T_j \quad (3.4)$$

где $e^{i\alpha_j^k}$ — некоторая фаза, зависящая от выбора фазы у $T_i T_j$. Для того чтобы $[T]$ было группой, необходимо, чтобы все α_j^k обращались в нуль. Тогда группа $[T]$ станет **изоморфна** группе $\mathcal{G}$. Такая возможность имеется для ряда групп, но не для всех. В частности, это возможно для группы перестановок, но невозможно для группы вращений, если система содержит нечетное число частиц с полуцелым **спином**. Несложно обеспечить выбор $\mathcal{G}$ таким образом, чтобы множество $[T]$ операторов преобразования представляло бы собой группу $\hat{\mathcal{G}}$, **гомоморфную** группе $\mathcal{G}$.

Итак, с каждой группой преобразований связано некоторое число законов сохранения. Всякий раз, когда сохраняющаяся наблюдаемая имеет классический аналог, эти законы сохранения идентичны соответствующим классическим законам. Ниже указаны наиболее часто встречающиеся из них:

1. Трансляционная инвариантность и сохранение полного импульса. Необходимое и достаточное условие инвариантности гамильтониана относительно трансляций состоит в инвариантности его относительно инфинитезимальных трансляций;
2. Инвариантность относительно вращений и сохранение момента импульса;

3. Инвариантность относительно отражений и сохранение четности. Из инвариантности гамильтониана относительно отражений в точке $[\hat{H}, \hat{S}_0] = 0$ следует, что четность S_0 является интегралом движения.
4. Инвариантность относительно перестановок и сохранение симметрии. В системе, состоящей из тождественных частиц, гамильтониан инвариантности относительно любой перестановки P этих частиц $[\hat{H}, \hat{S}_0] = 0$ при всех $P \implies$ что $\forall$ **наблюдаемая** (величина), в квантовой физике, построенная из ξ , является интегралом движения.

Всякая наблюдаемая является некоторой вещественной функцией $F(\xi)$ фундаментальных наблюдаемых $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$, системы. Образ этой наблюдаемой есть $B' \equiv F(\xi')$. Преобразование G полностью определяется, если известны законы преобразования основных наблюдаемых, т. е. если известны функции $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$, таких что

$$G[\xi_n] \equiv \xi'_n = f(\xi_n) \quad (3.5)$$

Поскольку рассматриваемые преобразования сохраняют алгебраические соотношения, постольку есть лишь две возможности: преобразование а) сохраняет фундаментальные перестановочные соотношения, б) меняет их знак. В первом случае оператор T , соответствующий преобразованию, линеен, во втором — антилинеен.

Оператор T должен удовлетворять соотношению $\xi'_n = T\xi_n T^+$ содержащим все физические свойства ξ . Однако этих равенств недостаточно для полного определения T . Можно подобрать T_1 — другой унитарный (или антиунитарный) оператор, удовлетворяющий тем же соотношениям. Но в этом случае будет верным соотношение $T_1 \xi T_1^+ = \xi'$ (опуская индекс n для упрощения записи) $\implies T_1 T \xi T T_1^+ = \xi' \implies [T T_1, \xi] = 0$ для $\forall \xi$.

Если предполагать **неприводимость** пространства состояний R^m по отношению к наблюдаемым ξ , т. е. что в R^m не содержится подпространств, инвариантных относительно ξ , то последняя формула будет верной тогда и только тогда, когда оператор $T_1 T = E$ пропорционален **единичному**. Этот результат следует из **первой леммы Шура**

3.1 и наталкивает на связь с формулой для взаимно простых чисел наибольший общий делитель которых равен единице: $(m, n) = 1$. Важно понять, из чего это следует?

3.1 Группы симметрии. Характеры

Все представления рассматриваются над полем $\mathbb{C}$ - алгебраически замкнутым полем.

Абелева группа — группа, в которой операция коммутативна: $\forall g_1, g_2 \in G$ имеем $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

Представление группы — гомоморфизм группы в группу линейных операторов на векторном пространстве. Если представление **неприводимо**, его нельзя разложить в прямую сумму меньших представлений.

Размерность представления — размерность векторного пространства, на котором действуют операторы представления.

Пусть в пространстве R^m задано представление D конечной группы G . Если в пространстве R^m существует подпространство R^k (при этом $(0 < k < m)$), инвариантное относительно всех преобразований D , то представление называется **приводимым** - т.е. $\forall x \in R^k$ результат $D(x) \in R^k$. Если же в пространстве R^m нельзя выделить инвариантное подпространство, то представление называется **неприводимым**.

Для унитарных представлений

Несложно доказать, что когда приводимое представление D является **унитарным**, то ортогональное дополнение подпространства R^k , которое мы обозначим через R^{m-k} , также инвариантно относительно преобразований D . Выбирая в качестве k первых ортов орты подпространства R^k , в качестве последних $m - k$ ортов - орты подпространства R^{m-k} , можно добиться квазидиагонального вида матрицы представления D .

Если пространство R^m разлагается на инвариантные подпространства, в каждом из которых реализуется неприводимое представление, то представление D называют **вполне приводимым**.

Представление D является приводимым если существует такая неособенная матрица V , что путем преобразования подобия матрица представления что $V^{-1}DV$ приобретает блочно-диагональный вид, где каждый блок соответствует неприводимому представлению. [Пет99].

[Пет99]: Петрашень Мария Ивановна (1999), Применение теории групп в квантовой механике

Пусть группа линейных операторов $\hat{T}_g$ гомоморфна группе G : $g_1, g_2 \dots g_m$ - . Тогда представление произвольного линейного оператора 3.4, быть разложено по ортам в линейном пространстве R^m , где m - размерность пространства и одновременно степень представления группы G .

$$T(\hat{g}_1)_k = \sum_{r=1}^{r=m} D_{r,k} \mathbf{e}_r \quad (3.6)$$

Матрицы $D(g_i)$ образуют представление порядка m группы G . Здесь R^m - это пространство представления, $e_1, e_2 \dots e_m$ - базис представления. Работа с линейными операторами сводится к работе с матрицами. При переходе к новому базису V матрицы представления испытывают преобразования подобия $V^{-1}DV$. Если все матрицы представления являются унитарными, то и само представление называют унитарным - оно сохраняет длину вектора.

Для неприводимого представления любой оператор, коммутирующий со всеми операторами представления, обязан быть скалярным вида sE , где s - это число. Ниже приведены 1,2 леммы Шура из которых вытекает соотношение ортогональности 3.7 матричных элементов унитарного представления.

Леммы Шура 1 и 2

1. Матрица M , коммутирующая со всеми матрицами неприводимого представления, кратна E - единичной: $MD(g) = D(g)M \implies Mx = x$ (M скаляр т.е. умножение E на число).
2. Пусть $D^{(1)}(g)$ и $D^{(2)}(g)$ - матрицы двух неприводимых, неэквивалентных представлений группы G порядка n_1, n_2 соответственно. Тогда любая прямоугольная матрица с n_1 столбцами и n_2 строками, удовлетворяющая соотношению $MD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)M$ для $\forall g \in G$, должна быть нулевой матрицей.

В случае неприводимых унитарных представлений $D^{(i)}$, $D^{(j)}$ порядка n_i и n_j соответственно для группы G , насчитывающей m элементов из первой и второй [леммы Шура](#) вытекает [соотношение ортогональности](#) для матричных элементов (Для наглядности следует представить себе шахматную доску и вспомнить как работает $\delta_{i,j}$):

$$\sum_{g \in G} D_{\mu\nu}^{(i)}(g) \overline{D_{\alpha\beta}^{(j)}(g)} = \frac{m}{n_i} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} \delta_{ij} \quad (3.7)$$

Это соотношение интерпретируется как условие ортогональности и нормировки векторов в m -мерном пространстве. Имеется ввиду вектор $D_{\mu\nu}^{(i)}(g_1), D_{\mu\nu}^{(i)}(g_2) \dots D_{\mu\nu}^{(i)}(g_m)$ или $D_{\mu\nu}^{(i)}$, разложенный по компонентам и аналогично для $D^{(j)}$. Число таких векторов, соответствующих одному неприводимому представлению $= n_i^2$, что в сумме равно размерности пространства матричных элементов неприводимого представления. Это следует из [теоремы Бернсайда](#):

$$\sum_i n_i^2 = m \quad (3.8)$$

Вычислим [характер представления группы](#) — функцию, определённую на группе, возвращающая след матрицы для исследуемого элемента g в представлении (см. более детально о характере ниже 5):

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{i=m} D_{ii}(g) = \text{tr}(D) \quad (3.9)$$

[Пет99]: Петрашень Мария Ивановна (1999), Применение теории групп в квантовой механике

[Ван79]: Ван дер Варден (1979), Алгебра

Свойства характеров представлений группы [Пет99], [Ван79]:

- Эквивалентные представления имеют одинаковые характеры $\chi(D) = \chi(V)^{-1}(D)V(g)$, поскольку след матрицы инвариантен относительно преобразования подобия.
- Характеры матриц представления, соответствующие элементам одного класса группы G , совпадают между собой. Характеры постоянны на классах сопряженности, другими словами характер — это функция класса.

- Характеры неприводимых представлений обладают свойством ортогональности:

$$\sum_{g \in G} \chi^i(g) \overline{\chi^j(g)} = m \delta_{i,j} \quad (3.10)$$

- это легко выводится из 3.7.

- Характер $\chi(g)$ вполне приводимого представления D равен сумме характеров всех неприводимых представлений, на которые оно может быть разложено. Разложение на неприводимые представления **единственно** с точностью до эквивалентности.

$$\begin{aligned} \chi(g) &= \sum_j r_j \chi^{(j)}(g) \\ r_j &= \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \overline{\chi}(g) \chi^{(j)}(g) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Где число r_j - подсчитывает, сколько раз неприводимое представление $D^{(j)}$ входит в разложение приводимого представления D , что символически записывается с помощью формулы (аналогично разложению приводимого представления на **компоненты** неприводимых представлений):

$$G \cong \sum_j^{\oplus} r_j G^{(j)} \quad (3.12)$$

Знак $\oplus$ обозначает не сумму матриц, а разложение на неприводимые представления.

Характеры представления $\chi(g_1), \chi(g_2), \chi(g_3), \dots, \chi(g_m)$, также можно рассматривать как составляющие вектора в m -мерном пространстве.

Характеры унитарных представлений

Для случая унитарных представлений характеры неприводимых представлений образуют систему ортонормированных векторов. Так как для элементов одного класса характеры совпадают, то все такие векторы принадлежат одному подпространству, при этом для одного класса компоненты векторов представляет собой равные величины

Применим операцию **сдвига** по всем элементам группы G путем умножения $\forall$ элемента слева g_s . Это можно выразить с помощью матрицы **регулярного представления** $\|R_{ij}\|$ порядка $m \times m$, в каждом столбце которой лишь один единичный элемент, а все остальные - нули. Регулярное представление содержит в себе все неприводимые представления группы в случае комплексных представлений конечных групп (это верно для алгебраически замкнутых полей, например, поля комплексных чисел). Согласно **теореме Машке**, регулярное представление разлагается в прямую сумму всех неприводимых представлений, причем каждое неприводимое представление входит в разложение столько раз, какова его размерность.

Произвольный вектор Φ подпространства может быть разложен по векторам, соответствующим неприводимым представлениям группы G , при этом $\Phi(g') = \Phi(g^{-1}g'g)$, для $\forall g, g'$, что обеспечивается за счёт полноты системы неприводимых представлений. Раскладывая вектор Φ принадлежащий пространству R^m , по полной системе векторов, можно получить для компонент этого вектора соотношение:

$$\Phi(g') = \sum_{j, \alpha, \beta} C_{\alpha, \beta}^{(j)} D_{\alpha, \beta}^{(j)}(g') = \sum_{j, \alpha, \beta} C_{\alpha, \beta}^{(j)} D_{\alpha, \beta}^{(j)}(g^{-1}g'g) \quad (3.13)$$

[Пет99]: Петрашень Мария Ивановна (1999), Применение теории групп в квантовой механике

Усредняя $\Phi(g')$ по всем элементам группы G и используя соотношение ортогональности 3.7, опуская промежуточные выкладки, получим [Пет99]:

$$\begin{aligned} \Phi(g') &= \frac{1}{m} \sum_j \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha, \beta}^{(j)} D_{\alpha, \beta}^{(j)}(g^{-1}g'g) = \sum_j B_j \chi^{(j)}(g') \\ B_j &= \frac{1}{n_j} \sum_{\alpha} C_{\alpha, \alpha}^{(j)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

При этом число различных неприводимых представлений группы равно числу её **классов сопряженности**. В результате получена формула, выведенная ранее для усреднения наблюдаемой с использованием статистической матрицы 2.2.

Характеры $\chi^{(R)}$ регулярного представления вычисляются по формуле особенно просто:

$$\begin{cases} \chi^{(R)}(g_s) = m & \text{if } g_s = E \\ \chi^{(R)}(g_s) = 0 & \text{if } g_s \neq E \end{cases} \quad (3.15)$$

Из последней формулы и 3.11 очевидно следует, что каждое неприводимое представление содержится в регулярном столько раз, каков порядок этого неприводимого представления n_i . Порядок приводимого представления равен сумме квадратов неприводимых (с учетом их кратности r_i) согласно формуле 3.8.

Число ортогональных векторов $D_{\alpha,\beta}^{(j)}$ совпадает с размерностью векторного пространства, в котором реализуется регулярное представление $\sum_j n_j^2 = m$ и векторы $D_{\alpha,\beta}^{(j)}$ образуют в нем полную систему ортогональных векторов. Это позволяет нагляднее отследить связь с целыми числами.

4 Распределение Гиббса и Дзета-функция

В этой секции (m,n) - сокращенное обозначение наибольшего общего делителя, в частности $(m, n) = 1$ - обозначение взаимно простых чисел, $\hbar$ - постоянная Планка N - число частиц, бозонов, фотонов, c - скорость света, w - частота волны де Бройля l - длина волны де Бройля вместо привычного λ , $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{l}$ - волновой вектор, указывающий направление волны, μ - химический потенциал, T - температура, V - объём, F - свободная энергия газа, за счет изменения которой в термодинамике совершается работа, что объясняет удобство использования этой переменной.

Микроканоническое распределение Гиббса выводится из формулы 2.7, постулирующей равновесность и независимость каждого микросостояния термодинамической системы

$$\begin{aligned} dw &= \text{const } \rho \delta(E - E') \\ dw &= \text{const } \delta(E - E') \prod_{\alpha} d\Gamma_{\alpha} \end{aligned} \quad (4.1)$$

В первой строке формулы выражена вероятность нахождения исследуемой системы через плотность распределения вероятностей в квазиклассическом случае, во второй строке формулы приведена вероятность нахождения исследуемой системы в некотором состоянии $d\Gamma$ в квантово-механическом представлении. В основе статистической физики лежит постулат **равновероятности микросостояний**, являющийся развитием принципа симметрии.

Любопытно отметить, что свободная энергия газа является простым следствием **условия нормировки** канонического распределения Гиббса. Условие нормировки позволяет вычислить свободную энергию F через вероятности квантовых состояний:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_n^N w_n = e^{\frac{F}{T}} \sum_n^N e^{-\frac{E_n}{T}} \\ \Rightarrow F &= -T \ln \sum_n^N e^{-\frac{E_n}{T}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Это наглядный пример связи между математикой, теоретической физикой и лабораторным экспериментом. В термодинамике свободная энергия F , энтропия S , энергия E , объем V , давления P , температура T ряд других переменных выводятся друг из друга и контролируются. Первые три перечисленные переменные являются **аддитивными** функциями.

Опираясь на этот постулат равновероятности всех доступных исследуемой системе микросостояний, вытекающий из симметрии, Гиббс вывел формулу:

$$\begin{aligned} w_n &= \exp\left(\frac{F - E_n}{T}\right) \\ \rho &= (2\pi\hbar)^s \exp\frac{F - E(p, q)}{T} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Выше приведена функция распределения вероятности по энергии системы в состоянии E_n в квантово-механическом представлении, и в квазиклассическом представлении. Здесь

- w_n — вероятность нахождения в состоянии, соответствующему волновой функции с собственным значением;
- E_n - уровень энергии n -ого квантового состояния;
- s — число степеней свободы;
- F - свободная энергия газа;
- ρ — плотность вероятности нахождения в конкретной фазовом дифференциале;
- $E(p, q)$ - энергия, как функция от обобщенных координат.

4.1 Статсумма и статвес

Матрицы плотности канонического распределения Гиббса находится по формуле:

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta \hat{H}} \quad \left(\beta = \frac{1}{T} \right). \quad (4.4)$$

Пусть $\phi'_E = |E\rangle'$ - собственный вектор гамильтониана $\hat{H}$ и $\mathcal{H}|E'\rangle = E'|E'\rangle$ тогда:

$$Z(\beta) = \text{Sp } e^{-\beta \mathcal{H}} = \sum_{E'} e^{-\beta E'} \quad (4.5)$$

И следовательно, статистическая сумма представляет собой квадратную матрицу (конечную либо бесконечную, но финитную.)

Z-сумма - статистическая сумма соответствует суммированию вероятностей по всем микросостояниям для заданного значения интервала энергии, условия равенства единице суммы вероятностей по полной группе событий и выводится из условия нормировки аналогично приведённому 2.16.

Статистическая сумма входит в распределение Гиббса в виде нормировочного множителя (она не зависит от j , обеспечивая равенство единице суммы вероятностей:

$$\sum_j P_j = \frac{1}{Z} \sum_j e^{-\beta E_j} = \frac{1}{Z} Z = 1. \quad (4.6)$$

Если система имеющая объём V и содержащее $N = N_a + N_b + N_c \dots$ частиц находится в равновесии с термостатом при температуре (в квазистационарном случае подсистемы, образующие одну исследуемую систему имеют одну и ту же температуру и β), то вероятность её микроскопических состояний определяется следующими выражениями:

$$Pr(d\Gamma) = \frac{1}{\prod_{a,b,c,\dots} N_a! N_b! N_c! \dots (2\pi\hbar)^{3N}} e^{-\beta\mathcal{H}_N} \frac{d\Gamma}{Z_N} \quad (4.7)$$

а статистическая сумма:

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{1}{\prod_{a,b,c,\dots} N_a! N_b! N_c! \dots, (2\pi\hbar)^{3N_a}} \int e^{-\beta\mathcal{H}_N} d\Gamma, \\ Z_N &= \sum_l e^{-\beta E_{N,l}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

в классическом случае в квантовомеханическом случае. В дальнейшем индекс N у Z -суммы для простоты опускается. Появление множителей вида $N_a! N_b! N_c! \dots$, в знаменателе следует из комбинаторики и обусловлено перестановочной симметрией, необходимостью избегания повторного подсчета микросостояний фазового пространства.

Упомянутые выше распределения Больцмана и Максвелла являются частными случаями канонического распределения Гиббса. В силу идентичности молекул газа при анализе распределения достаточно рассмотреть фазовое пространство лишь одной молекулы, выразить энергию в импульсном представлении в координатах dp . Далее интегрирование по обобщенным координатам dq системы можно заменить на простое умножение на объём сосуда — аналогичный алгоритм применяется для распределения Максвелла (2.6). Это значительно упрощает вычисления.

Важно помнить, что статистический вес $\Delta\Gamma$ удовлетворяет соотношению для квазистационарных термодинамических систем:

$$\Delta\Gamma \geq 0, \quad \lim_{E \rightarrow \infty} \Delta\Gamma(E) e^{-\alpha E} = 0 \quad (\alpha > 0) \quad (4.9)$$

Внимательный взгляд на 4.1 позволяет сделать вывод, что Z -сумма (статистическая сумма) для канонического ансамбля определяется через преобразование Лапласа от статистического его веса:

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int_{E_0}^{\infty} e^{-\beta E} \Delta\Gamma(E) dE, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta' - i\infty}^{\beta' + i\infty} Z(\beta) e^{\beta E} d\beta \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\beta' + i\beta'') e^{(\beta' + i\beta'')E} d\beta'', \quad (\beta' > 0). \end{aligned}$$

где E_0 - наиминизший уровень системы. Нижние формулы - это нахождение статистического веса $\Delta\Gamma(E)$ путем обратного преобразование Лапласа от Z - суммы. Интеграл берётся по контуру в плоскости $\beta \in \mathbb{C}$ образованного вертикальный прямой $\beta = \beta'$ и замыкаемого дугой полуокружности на ∞ . При этом подынтегральное выражение на дуге обращается в ноль, а интеграл от аналитической функции считается с помощью теореме о вычетах.

Для нахождения статистического веса исследуемой системы $I + II$, состоящей из подсистем I, II применяется операций свёртки статистических весов:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{I+II}(E) &= \int \Delta\Gamma_I(E') \Delta\Gamma_{II}(E - E') dE' \\ &= \int \Delta\Gamma_I(E - E'') \Delta\Gamma_{II}(E'') dE''. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Это соответствует произведению Z -сумм:

$$Z(\beta)_{I+II} = Z(\beta)_I \cdot Z(\beta)_{II} \quad (4.11)$$

Целочисленная группа $\{E_i\}$.

Вернёмся к выражению гамильтониана исследуемой системы, объединяющей k подсистем $\hat{H}_{\text{Общий}} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \dots \hat{H}_k$, и произвольного определения нулевого уровня потенциальной энергии, можно считать что:

- ▶ положительными (минимальное значение энергии для осциллятора благодаря принципу неопределенности составляет $\frac{1}{2}\hbar\omega$);
- ▶ в силу конечного значения нормы оператора $\hat{H}_{\text{Общий}}$ и квантования энергии - все энергетические уровни $l \in \mathcal{M}$, $0 < l < \Gamma$ целочисленные положительные значения $\in \mathbb{N}$
- ▶ представляет собой упорядоченное (либо частично упорядоченное множество в случае кратных собственных значений) по возрастанию $0 < E_0 \leq E_2 \dots \leq E_n$.

Среди множества собственных значений гамильтониана исследуемой системы могут встречаться кратные собственные значения E_i , равно как и пробелы из ряда $\mathbb{N}$. В силу линейности уравнения Шрёдингера совместное рассмотрение подсистем в составе исследуемой системы соответствует операции объединения множеств собственных значений. С помощью диагональной матрицы U с вещественными коэффициентами можно осуществить переход к ортонормированному базису $E_i \rightarrow \frac{i}{E_i}$, так чтобы квантовым состояниям $|1\rangle \dots |n\rangle$ соответствовали собственные значения гамильтониана (энергии E_i) в виде ряда последовательно следующих натуральных чисел интервала $1 \dots n$. Поскольку произведение эрмитовых матриц является эрмитовым, переход к новому базису 3.1 сохраняет свойство инвариантности наблюдаемых.

Для финитных $|\Psi(p, q)|^2 < \infty$ без ограничения общности уровни энергии исследуемой системы можно считать целочисленными, эквидистантными, а множество $\{E_i\}$ группой вычетов по сложению.

Каково число ненулевых значений элементов на главной диагонали матрицы в новом базисе? - Это число $n = \phi(a)$ равно функции Эйлера от выражения 4.14.

В квазистационарном состоянии общая энергия исследуемой системы сохраняется, поэтому множество $\{E_i\}$ замкнуто по операции сложения/вычитания. С позиции физики операции, связанные с переходами между энергетическим уровнями, можно рассматривать как единую операцию. Операторы рождения и уничтожения, широ-

ко применяемые в квантовой механике, включая изучение гармонических осцилляторов. Оператор уничтожения (обычно обозначаемый $\hat{a}$ уменьшает количество частиц в данном состоянии на единицу. Оператор рождения (обычно обозначаемый $\hat{a}^\dagger$ увеличивает количество частиц в заданном состоянии на единицу, он сопряжен к оператору уничтожения.

На основе этих операторов можно создать случайную функцию от двух аргументов, значением которой может быть $\hat{a}$ или $\hat{a}^\dagger$ и рассматривать такую функцию как одну операцию в группе $\{E_i\}$. Для финитных $|\Psi(p, q)|^2 < \infty$ без ограничения общности уровни энергии исследуемой системы можно считать целочисленными, эквидистантными, а множество $\{E_i\}$ аддитивной группой вычетов $\text{mod } E_{\text{общ.}}$.

Поскольку термомеханические переменные статистической физике имеют нормальное распределение [Лан02]), в продолжение этого мысленного эксперимента можно выбрать случайные наблюдаемые с нормальным распределением $N(k, \sigma)$:

$$\{X_0, X_1, \dots, X_k\} \quad (4.12)$$

где $k = 0, 1, \dots, (p - 1)$. Для простоты будем считать p - некоторое простым числом, а затем сделаем обобщение на произвольный случай натурального число.

В силу того, что интеграл по всем вероятностям состояний подсистемы образует полную группу событий и условия нормировки вероятности 2.16, а также целочисленности $\{E_i\}$ действует операция сравнения по модулю:

$$E_i \equiv E_j \pmod{E_{\text{total}}} \quad (4.13)$$

Несложно убедиться в том, что для исследуемой системы 4.12 значение энергии $\{E_i\}$ является группой вычетов по сложению порядка p , эквивалентной $\mathbb{Z}_p$.

Как показано в разделе статистическая сумма и статистический вес 6, если принять, что $p_i = e^{\beta E_i}$ $\beta = \frac{1}{T}$, где T - температура исследуемой системы, то свойству ортогональности волновых функций, соответствующих разным

Коммутатор операторов рождения и уничтожения, связанных с одним и тем же состоянием бозона, равен единице, в то время как все остальные коммутаторы обращаются в нуль. Для фермионов используются антикоммутатор вместо коммутатора.

[Лан02]: Ландау (2002), Теоретическая Физика В 10т. Том 5. Статистическая Физика.

собственным значениям должно соответствовать свойство взаимной простоты.

Лемма об ортогональности и взаимной простоте

В квазизамкнутой и квазистационарной исследуемой системе $\{\phi_i\} \in \mathcal{L}_2(G; \rho)$ с целочисленными собственными значениями $\{E_i\}$ для выполнения соотношения ортогональности $\langle \psi_{E_p}, \psi_{E_q} \rangle = \delta_{p,q}$ необходимо соблюдения условия: $(e^{\beta E_p}, e^{\beta E_q}) = 1 \quad p \neq q$

Таким образом простое число связано с вероятностью, с конкретным микроканоническим состоянием, с энергией подсистемы в составе исследуемой системы.

Доказательство этой леммы от обратного. Из независимости микросостояний, определяемого уровнем энергии 2.17 и определения статистической суммы 4.5 следует, что в рядах не должны повторяться одинаковые значения энергии, в противном случае возникнет двойной повтор числа микросостояний и нарушится определение статистического веса. Лемма доказана.

Опираясь на дискретность статистического веса Γ являющуюся следствием принципа неопределенности 8.1, нельзя ли сделать обобщение только что полученного вывода не только на случай простого числа, но и на произвольное натуральное число? Ответ будет дан ниже.

Метод звёзд и полос

Важно отметить, что число микросостояний в исследуемой системе для случая бозонов рассчитывается с помощью известного в комбинаторике метода звёзд и полос. Для нахождения количества способов размещения N_j одинаковых шаров по G_i различным ящикам представим шары в виде последовательности из N_j точек, а разделение между ящиками в виде $G_j - 1$ вертикальных отрезков. Общее количество элементов (точек и отрезков) составляет $N_j + G_i - 1$. Число способов выбрать позиции для $G_j - 1$ черточек среди этих элементов равно числу сочетаний из

$$a = \binom{N_j + G_i - 1}{G_i - 1} = \frac{(N_j + G_i - 1)!}{(G_i - 1)! N_j!} \quad (4.14)$$

Definition 4.1 Фермионы vs бозоны? - главное отличие состоит в том, что одни обладают целым спином, а другие – полуцелым. Частицы обладающие целым спином называются бозонами, а полуцелым – фермионами. Бозоны подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна, а фермионы – Ферми-Дирака. В ансамбле частиц, состоящем из бозонов, любое их количество может находиться в одинаковом состоянии. С фермионами все наоборот – наличие двух тождественных фермионов в одной системе частиц невозможно.

См. §2 Кубо [Ку607].

Можно сопоставить формулу с выводами, касающимися фазы волны, для случая WKB и интегралов Феймана. 1.27. Из термодинамики известно, что плотность вероятности ρ нахождения частицы в окрестности заданной точки 2.9 однозначно определяется как функция от энергии – это легко понять школьнику из распределений Больцмана и Максвелла – 2.2.

Заметим, что функция Эйлера мультипликативна, что соответствует принципу перемножения фазовых объемов подсистем, образующих исследуемую систему 2.19. В составе отдельной подсистемы возможно разделение фазового объема по тем переменным, которые соответствуют интегралам движения и согласуются с симметрией исследуемой системы см. 2.5. Этот процесс конечен и он определяется во-первых дискретностью фазового пространства, во вторых симметрией исследуемой системы.

Сначала рассмотрим характеристические функции $\xi(t)$ этих величин, являющиеся преобразованием Лапласа. Проверим, что $\{\xi\}$ также образует группу по умножению.

Характеристическая функция для x_k :

$$\xi_k(t) = M [e^{itx_k}] = e^{ikt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad (4.15)$$

Нормированные характеристические функции, образованные путем деления на Z_0 :

$$\tilde{\xi}_k = \frac{\xi_k}{\xi_0} = \frac{e^{ikt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}} = e^{ikt} \quad (4.16)$$

Выше все операции над статистическими суммами произведены для фермионов. По утверждению Кубо выводы при работе со статистическими суммами для случая бозонов будут более громоздкими, но останутся аналогичными. [Ку607]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

Групповая структура $\{\tilde{\xi}_k\}_{k=0}^{p-1}$ аха состоит из функций вида e^{ikt} и образует группу по умножению.

Проверим свойства группы:

- ▶ Замкнутость: $\tilde{\xi}_k(t) \times \tilde{\xi}_m(t) = e^{ikt} e^{imt} \equiv \tilde{\xi}_{k+m}(t) \pmod{p}$
- ▶ Ассоциативность: умножение комплексных экспонент ассоциативно.
- ▶ Нейтральный элемент: $\tilde{\xi}_0(t) = e^{i0t} = 1$
- ▶ Обратный элемент. Для $\forall \tilde{\xi}_k(t)$ обратный элемент $\tilde{\xi}_{-k}(t) \pmod{p}$, при этом
- ▶ $\tilde{\xi}_k(t) \tilde{\xi}_{-k}(t) = e^{ikt} \cdot e^{-ikt} \equiv 1 \pmod{p}$

Таким образом, нормированные характеристические функции $\{\tilde{\xi}_k\}_{k=0}^{p-1}$ образуют группу по умножению, изоморфную аддитивной группе Z_p .

Чтобы распространить предыдущие выводы о группе, нужно проверить аксиомы группы для нормированных Z -сумм. В каноническом ансамбле нормировка матрицы плотности уже включает деление на статистическую сумму Z 4.6. Однако для групповой структуры потребуются дополнительная нормировка самих Z -сумм.

Аналогично предыдущей задаче, можно ввести:

$$\tilde{Z}(\beta) = \frac{Z(\beta)}{Z_0(\beta)} \quad (4.17)$$

где $Z_0(\beta)$ — статистическая сумма эталонной системы (например, системы с $d\Gamma_0(E) = \delta(E)$ и $Z_0(\beta) = 1$. Почему в качестве эталонной системы для нормировки Z -сумм выбрана дельта-функция от энергии? - Потому что из определения дельта-функции:

$$\begin{aligned} Z_0(\beta) &= \int_{E_0}^{\infty} \delta(E) e^{-\beta E} dE = e^{-\beta \cdot 0} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(E) e^{-\beta E} dE = e^{-\beta \cdot 0} = 1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Проверка аксиом групп нормированных статистических сумм:

- Произведение нормированных $\tilde{Z}$ -сумм должно соответствовать свёртке статистических весов см. 4.10, 4.11. Это выполняется, поскольку $\tilde{Z}(\beta)_{I+II} = \tilde{Z}(\beta)_I \cdot \tilde{Z}(\beta)_{II}$
- Нейтральным элементом является $\tilde{Z}_0(\beta)$, соответствующий системе $d\Gamma(E) = \delta(E)$
- $\exists$ обратный элемент $\forall \tilde{Z}(\beta) \exists \tilde{Z}_i(\beta)^{-1}$, такой что: $\tilde{Z}_i(\beta) \cdot \tilde{Z}_i(\beta)^{-1} = 1$

Последнее утверждение требует пояснения. В ортонормальной системе статистические веса, соответствующие разным микросостояниям $\Delta\Gamma_i$ и $\Delta\Gamma_j$ являются независимыми, соответствующие функции распределения X_i , X_j также независимы. Преобразование Лапласа - это линейный оператор $Lu = F$ с областью определения $\mathcal{M}_L$. Обозначим с помощью $\mathcal{R}_L$ - область значений оператора L . Обратное преобразование Лапласа находится через обратный линейный оператор $u = L^{-1}F$. Легко доказать, что системы функций $\{\psi_k\}$ и $\{L\psi_k\}$ одновременно линейно независимы §1 [ЖБ22] - см. также Лемму об ортогональности и взаимной простоте 4.1 рассуждения, касающиеся базисов обеих систем функций в Приложении 1.1. $\implies$ статистические суммы $\tilde{Z}(\beta)_i, \tilde{Z}(\beta)_j \quad i \neq j$ как образы случайных величин, должны быть порождены на основе взаимных простых чисел $(e^{\beta E_i}, e^{\beta E_j}) = 1 \quad i \neq j$.

[ЖБ22]: Жаринов и др. (2022), Уравнения математической физики

4.2 Ортогональность, непроводимость и р-число

Z-суммы являются матрицами плотности (операторами). И для составной системы из независимых подсистем общая матрица плотности образуется по правилам тензорного произведения матриц см. [Вин02]:

[Вин02]: Винберг (2002), Курс алгебры. 3-е изд

$$\underline{Z_{\text{общее}}} = \bigotimes_{i=1}^m \underline{Z_i} \quad (4.19)$$

$$tr(\underline{Z_{\text{общее}}}) = tr(\underline{Z_1}) \cdot tr(\underline{Z_2}) \cdot \dots \cdot tr(\underline{Z_m}) \cdot \dots$$

При этом для каждого элемента на диагонали результирующей матрицы будут записаны выражения вида:

$$(Z_1 \otimes Z_2 \otimes Z_3 \dots)_{(i,j,k\dots),(i,j,k\dots)} = z_1(i,i) \cdot z_2(j,j) \cdot z_3(k,k) \cdot \dots = e^{-\beta E_i} e^{-\beta E_j} e^{-\beta E_k} \quad (4.20)$$

Произведение (нормированных $\tilde{Z}$, для которых упомянутые выше формулы аналогичны) статистических сумм однозначно в точности до перестановок, поскольку они представляют собой абелевы матрицы, обладающие свойством коммутативности, ассоциативности по умножению.

С учетом оговорки о целочисленности $\{E_i\}$ 4.13, для обеспечения однозначности прямого и обратного преобразований Лапласа, обеспечения независимости ортонормальных функций ψ_i, ψ_j имеющих вероятностную природу, дифференциала статистического веса $\Delta\Gamma_i$ - функции, определенной на основе $|\psi_i|^2$ случайных величин и соответственно $\tilde{Z}(\beta)_i$, для обеспечения статистической независимости $\Delta\Gamma_i, \Delta\Gamma_j$ необходимо соблюдение условия о взаимной простоте $(p_i = e^{\beta E_i}, p_j = e^{\beta E_j}) = 1$ для $\forall i \neq j$.

Статистическая сумма Z_i представляет собой (бес)конечную циклическую группу порожденную элементом $e^{-\beta E_i}$ (вариант зависит от применяемой математической модели: в физике $\mathbb{Z}$ систем с бесконечной энергией, фазовое пространство дискретно, функция Ψ , являющаяся решением уравнения Шрёдингера финитна).

Одновременно статистическая сумма Z_i представляет собой диагональную матрицу с элементами на основе ряда:

$$Z_i = \text{diag} \left\{ 1, \frac{1}{p_i}, \frac{1}{p_i^2}, \frac{1}{p_i^3} \dots \right\} \quad (4.21)$$

$p_i = e^{\beta E_i}$

Обозначим бесконечную/конечную циклическую группу, порожденную элементом $G = \langle g \rangle = \frac{1}{p}$. Легко доказать изоморфизм корректно определенного и биективного отображения f , такого чтобы:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow G & m &\rightarrow g^m \\ f : \mathbb{Z}_k &\rightarrow G & [m] &\rightarrow g^m \end{aligned} \quad (4.22)$$

для бесконечной и конечной группы соответственно, где $[m]$ обозначает группу вычетов ($\text{mod } m$).

Definition 4.2 Для любого подмножества $S \in A$ совокупность всех линейных комбинаций $k_1 a_1 + k_2 a_2 \dots k_n a_n$

$a_i \in S, k_i \in \mathbb{Z}$ есть наименьшая подгруппа группы A , содержащая S она называется подгруппой, порождённой подмножеством S и обозначается через $\langle S \rangle$. Если $\langle S \rangle = A$, то говорят что группа A порождается подмножеством S , и что S - это система порождающих группы A .

Статистические суммы всегда должны представлять собой смежные классы группы $G \implies \exists$ базис в обобщенных координатах и энергетическая шкала, в которых выражение $e^{\beta E_i} = p_i$ как раз и являлось бы простым числом. При этом условии статистическая сумма Z_i в виде ряда слагаемых вида $e^{-j\beta E_i} = \frac{1}{p_i^j}$ будет представлять собой (бес)конечную циклическую подгруппу группы G порожденную элементом $\langle g \rangle$, $g = \frac{1}{p}$, а каждое микро-состояние конструироваться за счет элементов группы, порожденной множеством простых чисел.

При таком выборе $\forall$ статистический вес $\Delta\Gamma_i$ и $\forall$ статистическая сумма $\tilde{Z}(\beta)_i$ будут при этом представлять смежный класс изоморфных групп:

$$\{\Delta\Gamma_i\} \cong \{\tilde{Z}(\beta)_i\} \quad (4.23)$$

Из формул нахождения характера абелевой группы, к разряду которых можно отнести группу из нормированных $\tilde{Z}$ -сумм, 5.4 и разложения циклической группы на произведение примарных групп. 5.10 следует, что ранее сделанный вывод для случая циклической группы простого порядка 5.2 можно распространить на группу произвольного порядка, если использовать функцию Эйлера от статистического веса исследуемой системы $\phi(\Gamma)$.

Вывод можно распространить и на случай бесконечных групп, соблюдая условие 5.2, поскольку:

- порядок группы всегда можно выбрать простым числом, превосходящим $\forall$ из простых чисел, соответствующих $\{\tilde{Z}(\beta)_i\}$;
- нормированные суммы представляют собой фундаментальные последовательности (или сходящиеся в себе последовательности - последовательность Коши) к пределу, находящемуся в компактном топологическом пространстве.

Конечное множество простых чисел порождает статистические суммы некоторой термодинамической системы.

Изложенный выше подход позволяет сконструировать сколь угодно большое числа независимых микросостояний $\Delta\Gamma_i$, обеспечить выполнение тензорных операций 4.19, 4.20 на основе статистических сумм $\tilde{Z}(\beta)_i$ и системы порождающих в виде множества простых чисел.

Закономерно в формуле нахождения функции Эйлера каждое простое p входит лишь 1 раз:

$$\phi(a) = a \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (4.24)$$

а степень простого числа уже учтена в каноническом разложении целого a , стоящего перед знаком произведения. Кроме того, как показано в главе 5, именно радикал значений произведения трёх целых чисел играет важную роль при доказательстве АВС-гипотезы.

Простые числа - это математическая модель возможности выделения (обособления) из состава системы подсистемы с аддитивным разделением ресурсов.

5 О квантовой природе p -чисел

В этой секции под (p, q) , применительно к числам, обозначается наибольший общий делитель чисел p и q . $\phi(a)$ обозначена функция Эйлера. число элементов взаимнопростых с a , не превышающих a , в частности для $a = p^\alpha$ простого числа $\phi(p) = p - 1$, для $x = \phi(p^\alpha)$ имеем $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = a \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ и для общего случая $\phi(a) = \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ - здесь в знаменателях все простые p делители x обозначается как $p|a$.

В приложении 2 раскрываются общие понятия и правила работы со статистической матрицей квантовомеханической системы.

Принимая во внимание 1.20 и что произведение $c_i c_i^*$ - это вероятность обнаружить у системы энергии E_n , получим вывод о равенстве собственных значений приведенных выше уравнений в операторной форме 1.30 соответственно коэффициентам c_i и c_i^* суперпозиции по стационарным решением уравнения Шрёдингера $\Psi(q, t)$. Квадрат модуля характеристического числа для интегрального уравнения Фредгольма (См. Приложение 1.3) является обратной величиной к квадрату модуля собственного значения оператора 1.3. Как будет показано ниже, не меняя общности,

можно связать эти значения с некоторым простым числом $|\mu_i|^2 = \frac{1}{p}$ и $|\lambda_i|^2 = p$, где p обозначает простое число и $\frac{1}{p} = \rho$ соответствует плотности вероятности 2.9.

Теорема о квантовой природе p -чисел

Для $\forall$ полной ортонормальной системы $\{\psi_n\}$ в $\mathcal{L}_2$ и $\forall$ квазистационарного решения уравнения Шрёдингера Ψ в $\mathcal{L}_2$, соответствующей квазизамкнутой системе, исходя из дискретного энергетического спектра её гамильтониана H , $\exists$ базис в канонических переменных такой, что на главной диагонали соответствующей статистической матрицы в энергетическом представлении будут расположены корни, равные обратным значениям ряда простых чисел: $\langle \bar{\psi}_n^* \bar{\psi}_n \rangle = \frac{1}{p_n}$, где $p_n = e^{\beta E_n}$, $\beta = \frac{1}{T}$ обратная величина от абсолютной температуры в энергетических единицах, E_n - собственное значение гамильтониана $\hat{H}\bar{\psi}_n = E_n\bar{\psi}_n$, где $\bar{\psi}_n(q)$ - коэффициент разложения Ψ по Фурье-гармонике 1.16. При этом кратность повторения каждого корня будет соответствовать кратности энергетического уровня исследуемой системы. Разным собственным функциям $\bar{\psi}_n$ соответствуют разные простые p_n и условию нормировки $\langle \bar{\psi}_m^* \bar{\psi}_n \rangle = p_m \delta(m,n)$ соответствует свойству взаимной простоты $(p_m, p_n) = 1$ - наибольший общий делитель.

Теорему можно сформулировать сугубо в терминах линейных операторов с ограниченной мерой дискретного спектра финитных квадратично интегрируемых функций, но такая формулировка будет более сложной для понимания и опосредованной, поскольку в основе математических постулатов, по убеждению автора, лежат принципы статистической физики.

Изложенные выше принципы нахождения среднего через статистическую матрицу 2.3, а также соотношение ортогональности 3.7 для матричных элементов имеют аналогию при работе с целыми числами. Теорема сопоставляет свойству ортогональности элементов матриц неприводимых представлений свойство целых чисел, выражающееся в отсутствие общих делителей $(p, q) = 1$. (что в краткой форме означает условие равенства единице наибольшего общего делителя). Проведём последовательный поиск доказательства.

Предположим, что исследуемая система находится в термодинамическом равновесии. В этом случае статистическая матрица имеет диагональный вид в базисе собственных состояний гамильтониана системы. Каждое значение энергетического уровня (оно же - собственное значение λ) повторяется на главной диагонали этой матрицы столько раз, какова его кратность. Диагональные матрицы коммутируют между собой.

Definition 5.1 Определение.

Говорят, что группа G раскладывается на прямое произведение своих подгрупп $G = G_1 \times \dots \times G_k$ если:

1. Каждый элемент $g \in G$ однозначно представляется в виде $g = g_1 \dots g_k$, где $g_i \in G_i$
2. $g_i g_j = g_j g_i$ для $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$, если $i \neq j$.

Очевидно, что если группа G конечна, то $|G| = |G_1| \dots |G_k|$. Условие (1) подразумевает, что $G_i \cap G_j = \{e\}$ для $i \neq j$. Правила умножения групп определены в условии (2) того же Определения 1.

Отождествляя каждый элемент с последовательностью $(e \dots g_i \dots e) \in G = G_1 \times \dots \times G_k$ где g_i элемент стоит на i месте, можно получить вложение $G_i \in G_1 \times \dots \times G_k$ в виде подгруппы множество $n \times n$ обратимых матриц вместе с операцией обычного умножения матриц: n

$$GL(n, R) \cong (K^*)^n = K_1^* \times \dots \times K_n^* \quad (5.1)$$

где K^* обозначает кольцо целых чисел с операцией умножения. Выше было сделано допущение, что статистическая матрица является диагональной, эрмитовой, при этом значения плотности вероятностей $\hat{w}$ на главной диагонали являются вещественными и положительными значениями 2.4.

Разложение абелевой группы в прямое произведение циклических следует из теоремы о структуре конечных абелевых групп. Любая конечная абелева группа может быть разложена в прямую сумму своих циклических подгрупп, порядки которых являются степенями простых чисел. Мультипликативная запись не меняет сути разложения — она лишь альтернативный способ обозначения групповой операции.

Учитывая, что абелева группа порядка m имеет точно m характеров, что $\forall$ конечная мультипликативная абелева группа G является прямым произведением циклических групп.

$$G \cong G_{r_1} \times G_{r_2} \times \cdots \times G_{r_m} \quad (5.2)$$

Приведенные классы вычетов по модулю $(mod\ m)$ образуют мультипликативную абелеву группу порядка $\phi(a)$, и это не случайно: функция Эйлера $\phi(a)$ как раз равна числу приведённых классов вычетов по модулю $m \mid a$.

Сравним более детально свойства характера конечной абелевой группы и аналогичные свойства для характера целых чисел. Пусть χ характер конечной абелевой группы G - не равная тождественно нулю комплекснозначная функция определённая на этой группе и обладающая свойством коммутативности $g_i g_j = g_k$ имеем:

$$\begin{aligned} \chi(g_i)\chi(g_j) &= \chi(g_k) \Rightarrow \chi(E) = 1, \chi(g_i g_i^{-1}) \\ &= \chi(g_i)\chi(g_i^{-1}) = 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Где под E понимается единичный элемент в группе G . Если группа G имеет порядок m то $\forall g$ в степени m равно единице $g^m = E$.

Характер χ_1 , обладающий свойством $\chi_1(g) = 1$ для $\forall g$ - именуется как главный характер группы G . Важно помнить, что статистическая матрица диагональна, эрмитова - соответствующие квадратные матрицы образуют абелеву группу по умножению.

Если все собственные значения всех матриц H различные то есть нет случайного выражения энергетического уровня, то мы можем утверждать что собственное векторы матрицы H , принадлежащее одному собственному значению λ , преобразуется по одному из неприводимых представлений группы G , следовательно кратности вырождения собственных значений матрицы H в этом случае должны совпадать с порядками неприводимых представлений группы G .

Если нет дополнительного вырождения то каждому энергетическому уровню - собственному значению λ соответ-

ствующие канонические переменные в конфигурационном пространстве преобразуются по одному из неприводимых представлений группы G возможность дополнительного выражения связано со случайным совпадением собственных значений матриц потенциальной энергии. За счёт изменение параметров задачи, не приводящих к изменению её симметрии, можно добиться снятия случайного выражения. Утверждение в соответствии собственных значений квантово-механической системы не приводимым представлениям её группы симметрии будем подразумевать без оговорок возможности случайного вырождения.

Definition 5.2 Примеры циклических групп и порождающих элементов:

- ▶ Аддитивная группа $\mathbb{Z}$ целых чисел является циклической, так как порождается элементом 1;
- ▶ Аддитивная группа $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю ($\text{mod } n$) является циклической, так как порождается элементом [1].
- ▶ Мультипликативная группа C_n комплексных корней n -ой степени из 1 является циклической. Эти корни задаются формулой:
- ▶ $\epsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \quad k = 0, 1, 2, n-1$

Заметим, что элемент g^k циклической группы $G = \langle g \rangle$ является порождающим $\langle g \rangle$ тогда и только тогда, когда $(k, n) = 1$.

Если порядок группы $\text{ord}(G) = p$, то группа $\langle g \rangle$ содержит ровно p элементов: $G = \langle g \rangle = \{e, g^2, g^3 \dots g^{p-1}\}$.

Пусть G является произведением циклических групп, при этом r_i - порядок группы G_i и при этом a_i , соответственно a_i - образующие циклические элементы (под)группы, всего таких подгрупп k . Тогда из $\chi(a)^r = E \Rightarrow \chi(a) = e^{\frac{2\pi i k}{r}}$, где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, $1, 2 \dots k \in \mathbb{Z}$ и $m = r_1 r_2 r_3 \dots r_k$, при этом $\forall a \in G$ может быть единственным образом представлен $a = a_1^{t_1} a_2^{t_2} \dots a_k^{t_k}$, где $0 \leq t_i \leq r_i$. Тогда для любого элемента группы $\forall a \in G$ его характер представим в виде произведения:

$$\chi(a) = \chi(a_1)^{t_1} \chi(a_2)^{t_2} \chi(a_3)^{t_3} \dots \chi(a_k)^{t_k} \quad (5.4)$$

Это соответствует тензорному произведению матриц представления групп, что находится в согласии с изложенными выше физическим принципами об интегралах движе-

ния 2.5. Сами характеры конечной мультипликативной абелевой группы G также образуют абелеву группу $\hat{G}$. Группа характеров $\hat{G}$ - дуальная группа.) При этом главный характер χ_1 группы является единичным элементом $\hat{G}$, $\chi^{-1}(g) = \chi(g^{-1})$ и группы $G \cong \hat{G}$ изоморфны. Этот изоморфизм зависит от разложения $G = G_1 \times G_2 \times G_3 \dots G_k$, от выбора образующих элементов циклических групп.

Для $\forall a \in G$ имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in G} \chi(a) &= m \quad \text{если} \quad \chi = \chi_1 \\ \sum_{a \in G} \chi(a) &= 0 \quad \text{если} \quad \chi \neq \chi_1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Где суммирование произошло по всем элементам группы G , при этом m - порядок группы. Аналогично:

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) &= m \quad \text{если} \quad a = E \\ \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) &= 0 \quad \text{если} \quad a \neq E \end{aligned} \quad (5.6)$$

Где суммирование произошло по всем характерам группы $\hat{G}$, при этом m - порядок группы. Можно распространить определение характера приведенных классов вычетов по модулю $(mod m)$ на все целые числа $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \chi(a) = \chi(b) \iff a \equiv b(mod m) \\ \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \\ \chi(a) = 0 \quad \text{если} \quad (a, m) > 1 \\ \chi(a) \neq 0 \quad \text{если} \quad (a, m) = 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

(Изложенное выше определение соответствует понятию характера Дирихле.)

$\chi(a)$ определяется на $\mathbb{Z}$ и обладает свойствами:

Периодичность: $\chi(a + b) = \chi(a) + \chi(b) \forall a, b \in \mathbb{Z}$. Полная мультипликативность $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \forall a, b \in \mathbb{Z}$ обнуление $\chi(n) = 0$ если $(n, m) > 1$ В результате образуется мультипликативная абелева группа, изоморфная $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ группе приведённых классов вычетов по модулю $(mod m)$, при этом порядок $m = \phi(a)$ - значению функции Эйлера.

$$\sum_{k(mod a)} \chi(k) = \begin{cases} \phi(a) & \text{если } \chi = \chi_1 \\ 0 & \text{если } \chi \neq \chi_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

Где суммирование произошло по всем характерам группы $\hat{G}$.

$$\sum_{\chi} \chi(k) = \begin{cases} \phi(m) & \text{если } k \equiv 1(mod m) \\ 0 & \text{если } k \not\equiv 1(mod m) \end{cases} \quad (5.9)$$

Если представления имеют один и тот же набор характеров, то они эквиваленты - это следует из единственности разложения на неприводимые компоненты и свойств ортогональности характеров неприводимых представлений. Данное свойство распространяется и на случай бесконечных групп, если сравниваемые представления вполне приводимы 3.12. Здесь требуется пояснение. Из теории представлений известно, что характер представления однозначно определяет его с точностью до эквивалентности. Это следует из того, что характер — это след матрицы представления группы $tr(G)$, и если два представления имеют одинаковые характеры для всех элементов группы, то их неприводимые компоненты совпадают по кратности благодаря ортогональности характеров.

Неприводимые представления бесконечных групп

Для бесконечных групп неприводимые представления могут быть бесконечномерными. Однако если рассматривать вполне приводимые представления (те, которые разлагаются в прямую сумму неприводимых), то аналогичное свойство может сохраняться при условии, что разложение на неприводимые компоненты единственно, и характеры определены корректно. Например, в компактных группах характеры неприводимых представлений образуют ортонормированную систему, и равенство характеров влечёт эквивалентность представлений.

Лемма об ортогональности и взаимной простоте может быть распространена на характеры неприводимых представлений 4.1

Definition 5.3 Определение компактной группы. Компактная (топологическая) группа — это топологическая группа, топология которой реализует её как компактное топологическое пространство (при действии на элемент группы результат также остаётся в группе). Компактные группы являются естественным обобщением конечных групп с дискретной топологией и обладают свойствами, которые в значительной степени сохраняются. Компактные группы имеют хорошо изученную теорию, связанную с групповыми действиями и теорией представлений.

Сравнивая полученные результаты 5.7 с формулами нахождения среднего 1.8 оператора наблюдаемой и формулой следа для характеров представления группы 3.9, можно сделать вывод об их эквивалентности.

Аддитивная группа Z_n классов вычетов по модулю n является циклической 5.2.

Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ — каноническое представление целого числа путём разложения на простые множители, то верно следующее разложение:

$$Z_n \cong Z_{p_1^{l_1}} \oplus Z_{p_2^{l_2}} \cdots \oplus Z_{p_s^{l_s}} \quad (5.10)$$

Definition 5.4 Конечная примарная группу (p -группа) — это группа, для которой существует такое простое число p , что порядок каждого её элемента является некоторой степенью этого числа.

Поэтому наряду с комплекснозначная формулой произведения 5.4 можно применять аналогичную, но на основе произведения циклических групп Z_n 5.10.

6 ζ -функция есть $\otimes$ всех Z -сумм

для полной ортонормальной системы.

Лемма 4

Если $f(x)$ - вполне мультипликативная арифметиче-

ская функция и ряд $\sum_1^\infty f(n)$ сходится абсолютно, то верно тождество

$$\begin{aligned} Sum = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + f(p^3) \dots) \\ &= \prod_p (1 - f(p))^{-1} \quad (6.1) \end{aligned}$$

Напомним, что для вполне мультипликативной арифметической функции $f(ab) = f(a)f(b) \longrightarrow f(a) = 1$, предполагается абсолютная сходимость ряда вида, аналогичного только что приведенному (так называемая производящая арифметическая функция).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству эквивалентности обоих определений ζ -функции 1.1 и 1.2. Достаточно разложить в ряд геометрической прогрессии частичную сумму. $P(x)_{n \leq N} = (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots)$, а затем убедиться, что полная сумма Sum ряда отличается от частичной $|Sum - P(N)_{n \leq N}| \leq |P(N)_{n > N}| \rightarrow 0$, обращающая на каждом шаге внимание на простые делители n и абсолютную сходимость ряда 6.1 см. [Чан74].

[Чан74]: Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

$\implies$ произведение всех Z -сумм, образует ζ -функцию. С помощью обратного преобразования Лапласа ζ -функции получится статистический вес Γ для случая полной ортонормальной системы с весом (1.1) в виде ряда последовательно следующих простых чисел. Убедиться в этом позволяет само определение ζ -функции 1.1, 1.2 и только что доказанная лемма 6.

Полная ортонормальной системе в импульсном представлении соответствует $\delta(q' - q'')$ -функция точечной частицы, то есть в виде плоских волны. (Возможно альтернативное представление $\delta(p' - p'')$ -функции в координатном представлении: плоская волна, как результат воздействия бесконечного числа точечных источников).

Выше был выбран базис из ортонормальных функций с весом, произведена частичная упорядоченность положительных целочисленных собственных значений (энергии) по возрастанию. Исходя из симметрии системы, возможности разложения унитарного представления группы на неприводимых представлений свойству независимости линейной системы (базис из собственных функций) необходимо сопоставлять простые числа. Каждое простое

число соответствует подсистеме, неприводимому представлению, компоненте представления группы симметрии некоторого решения уравнения Шрёдингера.

Таким образом обеспечивается условие, необходимое для выполнения аксиом теории групп для нормированных статистических сумм 4.1:

$$\begin{aligned} \forall \tilde{Z}(\beta) \exists \tilde{Z}_i(\beta)^{-1} \quad \tilde{Z}_i(\beta) \cdot \tilde{Z}_i(\beta)^{-1} &\equiv 1 \pmod{\tilde{Z}_{\text{общая}}} \\ \tilde{Z}_i(\beta)^{-1} &= \frac{\tilde{Z}_{\text{общая}}}{\tilde{Z}_i(\beta)} = \tilde{Z}_1(\beta) \dots \tilde{Z}_{i-1}(\beta) \tilde{Z}_{i+1}(\beta) \dots \tilde{Z}_m(\beta) \end{aligned} \quad (6.2)$$

(Во второй формуле в процессе нахождения обратного элемента была сокращена статистическая сумма $\tilde{Z}_i(\beta)$). В силу закона возрастания энтропии, статистический вес должен стремиться к максимально возможному значению при заданных параметрах. Поскольку максимально возможное число классов смежности для фазового объёма Γ определяется с помощью функции Эйлера $\phi(\Gamma)$ от фазового объёма, $\implies$ Функция Эйлера $\phi(\Gamma)$ равна числу смежных классов, по которым должно производиться усреднение при определении наблюдаемых.

Таким образом, Теорема 5 о квантовой природе p -чисел доказана.

Характеристические функции наблюдаемых, равно как и нормированные статистические суммы образуют группы.

Следствие 1

Для $\forall$ компактного многообразия $\mathbb{M}$ в фазовом пространстве $\exists$ каноническое представление целого положительного числа a , равное статистическому весу Γ исследуемой термодинамической системы. Более того, в разложении положительного целого на простые числа закодирована информация о подсистемах, степенях симметрии и кратности вырождения уровней для решения уравнения Шрёдингера исследуемой системы.

В каноническом разложении целого числа каждое простое число однозначно соответствует определённому значению собственного числа оператора гамильтониан исследуемой системы и матрицы приводимого представления унитарного преобразования группы симметрии, при этом степень простого числа соответствует кратности вхождения

Функция Эйлера $\phi(\Gamma)$ равна числу смежных классов, по которым должно производиться усреднение при определении наблюдаемых.

неприводимого представления в разложение вполне приводимого представления $\implies$ степень простого числа соответствует порядку соответствующей циклической группы в разложении группы G на циклические подгруппы 5.2. Из уравнения Шрёдингера следует, что степень простого числа соответствует кратности вырождения энергетического уровня в исследуемой системе.

Следствие 2

$\forall$ каноническому представлению $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_L^{\alpha_k}$ целого положительного числа можно сопоставить в обобщенных координатах $\phi(a)$ квантовомеханическую систему состоящую из невзаимодействующих, но разделяющих общий ресурс k подсистем, с уровнями энергии кратности α_i . Конкретные значения определяются разложением унитарного представления группы симметрии на неприводимые представления.

При этом для расчета числа смежных классов эквивалентности в группе необходимо применить функцию Эйлера по формуле $\phi(\Gamma)$.

Как будет показано ниже для больших значений коэффициент $\frac{\phi(\Gamma)}{\Gamma}$ стремится к единице см. Функции Чебышёва и энтропия 14.5, но он имеет принципиально важное значение для выводов, полученных в настоящем исследовании.

$\forall$ подсистема исследуемой системы характеризуется своим подмножеством собственных чисел гамильтониана исследуемой системы (энергетических уровней), однозначно соответствующих множеству простых чисел, а кратность собственного числа- степени простого числа в каноническом разложении целого.

Можно дать следующее определение простого числа с позиции физики, поскольку эмпирическая проверка математических аксиом производится через эксперимент и наблюдение:

Легко доказать, что Лемма об ортогональности и взаимной простоте 4.1 может быть распространена и на характеры представлений групп симметрии, и на неприводимые представления, на инвариантные линейные подпространства, которые подробнее рассматриваются ниже.

6.1 Абелева группа и статматрица

Из алгебры известно для любого билинейного отображения векторных пространств $\phi : V \times W \rightarrow U$ $\exists!$ линейное отображение $\psi = V \otimes W \rightarrow U$ такое что верно следующее тензорное $\otimes$ произведение :

$$\phi(x, y) = \psi(x \otimes y) \quad (6.3)$$

для $\forall x \in V, y \in W$. (Это следует из взаимной ортогональности базисных векторов V, W). Таким образом, для $\forall z \in V \otimes W$, где $z = x \otimes y, x \in V, y \in W$ и это разложение единственно в точности до замены $x \rightarrow ax, y = \frac{1}{a}y$, где $a \in K^*$.

Разложение композиции приводимого представлений $D^{(i)} \otimes D^{(j)}$ на неприводимые возможно через коэффициенты Клебша-Гордона:

$$D^{(i)}(g) \otimes D^{(j)}(g) = \sum_l^{\otimes} \gamma_{i,j,l} D^{(l)}(g) \quad (6.4)$$

Если $V^{(i)}$ — это представление некоторой группы симметрии (например, унитарной группы G действующей в $\mathbb{R}^m$), то по общей теории представлений компактных или полупростых групп оно может быть разложено в прямую сумму неприводимых представлений:

$$V_i = \bigoplus_j r_{ij} W_j \quad (6.5)$$

где W_j - неприводимые представления, а $r_{i,j}$ - их кратности.

Когда G является тензорным произведением представлений:

$$G = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cdots \otimes V_k \quad (6.6)$$

тогда его разложение на неприводимые компоненты V_j соответствует выделению симметричных подпространств (например, полному угловому моменту в системе спинов). Если V_i разлагается на компоненты 6.5, то кроме того G разлагается по формуле:

$$G = \bigotimes_{j=1}^k \left(\bigoplus_i r_{ij} w_j \right) = \bigoplus_{j_1, j_2, \dots, j_k} (r_{1j_1} \cdots r_{kj_k}) (W_{j_1} \otimes \cdots \otimes W_{j_k}). \quad (6.7)$$

Взаимосвязь определяется правилами композиции представлений, которые зависят от конкретной группы симметрии. Таким образом, в основе алгебры заложены физика и симметрия.

В силу условия отсутствия взаимодействия между подсистемами матрица плотности исследуемой системы является сепарабельной (разложимой в тензорное произведение матриц подсистем) Если ρ - диагональная и сепарабельная матрица, то

$$\rho = \text{diag} \lambda_1^{(1)} \otimes \text{diag} \lambda_2^{(2)} \otimes \dots \text{diag} \lambda_k^{(k)} \quad (6.8)$$

где $\lambda_i^{(i)}$ - веса подсистем. В контексте сепарабельного состояния, веса подсистем — это вероятности, связанные с каждым возможным состоянием подсистемы, и они должны удовлетворять условиям нормировки (сумма вероятностей равна 1 для каждой подсистемы). Это легко обеспечивается за счёт подсчета соответствующего числа микроканонических состояний для выделенной подсистемы с помощью функции Эйлера и деления на общее число микроканонических состояний. Общее число микроканонических состояний как раз позволяет рассчитать ζ -функция. Именно по этой причине она используется для нормировки линейных операторов в квантовой механике [Tax11].

[Tax11]: Тахтаджян (2011), Квантовая механика для математиков, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика, М.–Ижевск 2011, 496 с.; English transl., LA Takhtajan, Quantum mechanics for mathematicians

6.2 Формула Планка

Для понимания основной идеи доказательства Гипотезы Римана, школьникам можно обратиться к формуле Планка открытой Максом Планком в 1900 году. Спектральная плотность энергии чёрного тела представляет собой абсолютно сходящийся ряд от вполне мультипликативной функции. Предположим, что излучение исследуется не в вакууме, а в материальной среде. Условие идеальности газа требует также малости взаимодействия с веществом. Наличие хотя бы небольшого количества

вещества необходимо для самой возможности установления теплового равновесия в излучении. Общее число исследуемых фотонов- бозонов N является переменной величиной, и оно определяется из условий теплового равновесия. Минимизируя свободную энергию газа F при заданных температуре T и объеме V , получим в качестве одного из необходимых условий $\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu = 0$, из чего следует, что химический потенциал фотонного газа равен нулю.

Функция распределения фотонов по различным квантовым состояниям с определенным значением энергии $\epsilon = \hbar\omega = \hbar ck$ и импульса $\hbar \vec{k}$, с учетом возможности поперечной поляризации вдоль каждой из двух ортогональных осей [Лан02]:

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \quad (6.9)$$

[Лан02]: Ландау (2002), Теоретическая Физика В 10т. Том 5. Статистическая Физика.

Полагая, исследуемый объём достаточно большим по сравнению с длиной волны, можно перейти от дискретного к непрерывному распределению собственных частот излучения. Считая, что волновой вектор задается тремя компонентами на основе взаимно простых натуральных чисел m_x, m_y, m_z

$$\vec{k} = \frac{\pi}{l}(m_x, m_y, m_z) \quad (6.10)$$

По аналогии с формулой распределения Максвелла 2.6 находим число колебаний с компонентами волнового вектора k в интервале $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ равно:

$$\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} V \quad (6.11)$$

(Важно помнить о широком диапазоне шкал для длины волны (соответственно для частоты) - нанометры, ангстремы, атомная единица, Планковская длина, что позволяет использовать только что приведённую формулу в широком диапазоне, заведомо охватывающем наперед заданный диапазон простых чисел.) С учётом двух независимых направлений поляризации колебаний и связи частоты с волновым вектором $\omega = ck$ получим число квантовых состояний фотонов в интервале частот $[\omega_n \dots \omega_n + \Delta\omega]$.

Их чего легко получить число фотонов в данном интервале частот, а далее, умножив полученный результат на энергию одного фотона $\hbar\omega$, вывести зависимость спектральной плотности энергии, как функции от частоты $\omega_n = \Delta\omega n$ и абсолютной температуры T в энергетических единицах (постоянная Больцмана опущена):

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1}. \quad (6.12)$$

Формула позволяет вычислить вероятность обнаружения энергии соответствующей гармонике (обертоне) в спектральном разложении по всему спектру. Ряд на основе $f(n)$ сходится абсолютно (в нашем случае $\omega = \Delta\omega n$).

Спектр чёрного излучения содержит весь диапазон длин волн, за пределами которого нет излучения, нет решений уравнения Шрёдингера для квазистационарного случая. Это наглядная интерпретация полноты системы ортонормированных функций.

Формула Планка - это представление ζ -функции в полной системе ортонормальных функций с весом в виде множителя $\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot e^{\frac{\hbar\omega}{T}}$, при этом можно также установить соответствие $p_i = e^{\frac{\hbar\omega_i}{T}} = e^{\beta E_i} \quad \frac{1}{p_i} = e^{-\beta E_i}$.

$\Rightarrow$ вывод о подобии ζ -функции выражению спектральной плотности энергии излучения чёрного тела в точности до весового множителя 6.12. Переход к ортонормальному базису в энергетическом представлении с учетом весовых коэффициентов в виде простых чисел обеспечит полную тождественность формул.

Формула ряда Дирихле исключает повторы в спектре излучения. Вместе с тем формула Планка охватывает весь спектр излучения чёрного тела, за пределами которого волн де Бройля нет. В силу теплового равновесия между веществом и фотонами, в силу того, что химический потенциал фотонного газа равен нулю, волны, частицы - словом, материя, за пределами этого спектра отсутствуют. При этом фаза волны соответствует значению нетривиального нуля $s = \frac{1}{2} + it$. Таким образом представлен полный спектр излучения чёрного тела и волны де Бройля, а следовательно и частицы. $\Rightarrow$ ζ -функция выражает принцип равновероятности микроканонических состояний, вытекающий из симметрии в каноническом

распределении Гиббса. Нули на мнимой оси $s = \frac{1}{2}$ на $\mathbb{Z}$ соответствуют узлам волновой функции.

Почему именно узлам? - Дело в том, что в формуле при выводе формулы Планка неявно использованы условия излучения Зоммерфельда. Эти условия выведены из решения $u(x, t) = u(x)e^{i\omega t}$ краевой задачи для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta v + k^2 v = -f(x), k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \quad (6.13)$$

на рассеяние (дифракцию), когда задана приходящая (из бесконечности) плоская волна, подвергаемая изменению из-за наличия некоторого препятствия на границе $\hat{G}$, замыкающей область G . Препятствие порождает рассеянную волну $v(x)$. Эта волна вдали от рассеивающих центров будет близка к расходящейся сферической волне. Суммарное же возмущение $u()$ вне области G складывается из плоской и рассеянной волн, которые интерферируя обнаруживают узлы и пучности, как и в случае 6.10.

Принцип наименьшего действия отбирает из семейства виртуальных траекторий одну, удовлетворяющую классическим уравнение движения. Можно считать, что значения аргумента $\zeta(s)$ - функции, отличные от лежащих на оси $s = \frac{1}{2} + it$ в результате суперпозиции обнулились.

7 Заключение

Для построения непротиворечивой математической модели можно создать непротиворечивую алгебру за счёт отношений гомоморфизма для следующих объектов: 7.1:

В силу Теоремы о квантовой природе p - чисел 5 именно значения в виде ряда простых числе должны располагаться на главной диагонали статистической матрицы исследуемой системы. (Для простоты изложения полагаем, что все простые числа на главной диагонали матрицы упорядочены по возрастанию.)

Простое число с позиции физики

Для $\forall$ исследуемой системы $\exists$ адекватная система, исходя из её энергетического спектра, в базисе которой на диагонали статистической матрицы находятся значения: $e^{-\beta E_i} = \frac{1}{p_i}$, как группопорождающий элемент.

Таблица 7.1: Непротиворечивая алгебра. Гомоморфизм

Трудность понимания $\longrightarrow$			
Простые числа	Целочисленные многочлены	Системы ЛДУ $\mathbf{y} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$. Матрицы	Квантовая механика. Линейные операторы
2,3,5,7,11 ... и чётные целые числа $2\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$	$f = c \prod_p p^{\alpha(p)}$	Группа симметрии G . вполне приводимое представление и его разложение на неприводимые $D = \sum_j^{\oplus} r_j D^{(j)}$	$\hat{H}\psi = E\psi$ и формула энтропии $S = -\sum_i w_i \ln(w_i)$
$\frac{1}{p}$ - плотность вероятности, p - дифференциал $\Delta\Gamma$	Характеристический многочлен $(\lambda - a_i)^k$ матрицы	Статистический вес Γ и его дифференциал $\Delta\Gamma$	Плотность вероятности $ \Psi ^2 = \sum_{m,n} c_m^* \cdot c_n \psi_m^* \psi_n$ Статистическая матрица. Z-сумма
Простое $e^{\beta E_i} = p_i$, как группобразующий элемент для группы симметрии $G = \langle p \rangle$	Неприводимые многочлены	$R = R_1 \oplus R_2 \cdots \oplus R_i$ Инвариантные подпространства. Характеристический многочлен.	Кратное собственное значение гамильтониана (вырожденный энергетический уровень).
Основная теорема арифметики $a = \prod_p p^{\alpha(p)}$	Многочлен и функции от матрицы	Описание динамических процессов	Моделирование микромира
$\longleftarrow$ Основания			

Простое число - это группобразующий элемент статистической суммы для определенного значения энергии $p_i = e^{\beta E_i}$. Свойства делимости простых чисел только на единицу и себя следует из симметрии, из независимости и случайного характера микросостояний любой термодинамической системы. Ряд простых чисел соответствует полной ортонормальной системе волновых функций, являющихся решением уравнения Шрёдингера.

Усреднённое значение логарифма следа по этой матрице представляет собой энтропию исследуемой системы.

При этом возможны кратные повторы собственных значений, вплоть до сколь угодно больших значений. В результате образуется ортонормальная система функций в пространстве Лебега с весом. Согласно теоремам Фредгольма для указанной статистической матрицы существует изо-

морфная система ЛДУ, в гильбертовом пространстве, где собственные значения представляют собой простые числа $p_i = e^{\beta E_i}$, повторяемые на диагонали также с учетом кратности вырождения. Пространство Гильберта. Детерминант этой матрицы образует статистический вес.

Принимая во внимание, что плотность вероятности пропорциональна квадрату амплитуды волновой функции $|\Psi|^2 = \sum_{m,n} c_m^* \cdot c_n \psi_m^* \psi_n$, можно выразить волновую функцию Ψ , как функцию от плотности вероятности $\sqrt{\rho} = p^{\frac{1}{2}}$ и фазы S в виде мнимого числа, другими словами, показатель степени в ζ функции, где находятся нетривиальные нули $s = \frac{1}{2} + it$.

Благодаря возможности обособления - выделения подсистемы в составе системы энергия является аддитивной переменной, энергия исследуемой системы равна сумме энергии образующих её подсистем. При этом среднее значение энергии исследуемой системы не зависит от времени:

$$\langle \hat{H} \rangle = \sum_m E_m |c_m|^2 \quad (7.1)$$

И поскольку рассматриваемая система ортонормированных функций в гильбертовом пространстве для $\forall$ решения уравнения Шрёдингера является полной, с учётом сказанного выше, можно сделать вывод о том, что другие решения находятся за пределами ортонормальной системы, противоречат равенству Парсеваля - Стеклова.

Это значит, что нетривиальные нули ζ - функции, которые расположены вне прямой $s = \frac{1}{2} + it$ на $\mathbb{C}$, не могут моделировать материальные объекты Вселенной. Из допущения $\exists$ нетривиальных нулей помимо только что упомянутой прямой вытекает апория.

Такое допущение не поддается верификации и эмпирической проверке. Апория от греческого *απόρροια* безысходность, безвыходное положение — вымышленная, логически верная ситуация (высказывание, утверждение, суждение или вывод), которая не может существовать в реальности.

Следовательно, Гипотеза Римана доказана.

Постулат. математические теоремы должны иметь эмпирическую проверку. Логически непротиворечивое суждение, не соответствующее ни одному объекту в природе, ложно (апория).

Проблема Гольдбаха

4 Проблема Гольдбаха

1 Введение	110
2 Доказательство . . .	112

1 Введение

В 1742 году математик Кристиан Гольдбах написал письмо Леонарду Эйлеру, в котором высказал предположение о том, что любое нечётное число, большее пяти, может быть представлено в виде суммы трёх простых чисел. Эйлер заинтересовался этой проблемой и выдвинул более сильную гипотезу: любое чётное число, большее двух, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел.

Первое утверждение называется тернарной проблемой Гольдбаха, а второе — бинарной проблемой Гольдбаха или проблемой Эйлера. В чём эта проблема заключается? — любое чётное число, начиная с четырёх, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел.

Любое чётное число, начиная с четырёх, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел- Бинарная проблема Гольдбаха-Эйлера

Это утверждение остаётся открытым вопросом в математике и по состоянию на 2025 год не было доказано.

(В сочетании с гипотезой Римана проблема Гольдбаха включена в список проблем Гильберта под номером восемь.)

Существует более слабая версия гипотезы — тернарная проблема Гольдбаха, которая утверждает, что любое нечётное число, начиная с семи, может быть представлено в виде суммы трёх простых чисел. В 2013 году перуанский математик Харальд Гельфготт доказал эту версию.

Из справедливости бинарной гипотезы Гольдбаха следует справедливость тернарной: если любое чётное число, начиная с четырёх, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел, то, добавляя три к каждому чётному числу, можно получить все нечётные числа, начиная с семи.

Эквивалентная формулировка бинарной гипотезы Гольдбаха: любое целое число больше единицы может быть

представлено как среднее арифметическое двух (возможно, одинаковых) простых чисел.

В 1937 году математик СССР Иван Матвеевич Виноградов и Теодор Эстерманн доказали, что почти все чётные числа могут быть представлены в виде суммы двух простых чисел.

Метод тригонометрических сумм Виноградова

Суть метода: выписывается точная формула, выражающая число решений изучаемого уравнения или число дробных долей изучаемой функции, попадающих в заданный интервал, или число целых точек в заданной области, в виде интеграла от тригонометрической суммы; точная формула представляется суммой двух слагаемых – главного и дополнительного. Главное слагаемое составляет главный член асимптотической формулы, дополнительное – остаточный. В таких аддитивных задачах, как проблема Варинга или проблема Гольдбаха, главное слагаемое исследуется методом, близким к круговому методу Харди–Литтлвуда–Рамануджанав форме тригонометрических сумм Виноградова.

В 2013 году [тернарная гипотеза Гольдбаха](#) была окончательно доказана Харальдом Гельфготтом

Из справедливости тернарной гипотезы Гольдбаха, доказанной в 2013 году, следует, что любое чётное число может быть представлено в виде суммы не более чем четырёх простых чисел.

В 1966 году Чэнь Цзинжунь доказал, что любое достаточно большое чётное число может быть представлено либо в виде суммы двух простых чисел, либо в виде суммы простого числа и полупростого (произведения двух простых чисел). Например, $100 = 23 + 7 \cdot 11$.

На апрель 2012 года бинарная гипотеза Гольдбаха была проверена ?? для всех чётных чисел, не превышающих $4 \cdot 10^{18}$.

2 Доказательство

[Хар62]: Харкевич (1962),
Спектры и анализ

Как часто это бывает в точных науках, изменение постановки задачи - это путь к нахождению её решения. Пусть заданы два сигнала $f(t)$ и $g(t)$, принадлежащие пространству Лебега $\mathcal{L}_2(G)$. (т.е. квадратично интегрируемые) на всей области определения. Их спектры $F(w)$ и соответственно $G(w)$ [Хар62] определены через преобразование Фурье.

Сигналы $f(t)$ и $g(t)$ не коррелируют между собой. Это означает, что их **свёртка** (скалярное произведение) равна нулю:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^t f(t)g^*(t - \tau) d\tau = 0 \quad (2.1)$$

[Мыш72]: Мышкис (1972),
Высшая математика специальные курсы

(Преобразование Лапласа являются разновидностью преобразования Фурье, в чём легко убедиться через замену переменных. [Мыш72]).

Пусть полная ортонормированная система функций $\{\psi_k\}$. описывающая общий спектр $H(w)$, объединяющий $F(w)$ и $G(w) \implies \{\psi_k\}$ является общим базисом 1.1, для $F(w)$ и $G(w)$. Полная ортонормированная система $\{\psi_k\}$ позволяет разложить любой сигнал из $\mathcal{L}_2(G)$ по коэффициентам Фурье 1.3. Поскольку $f(t)$ и $g(t)$ ортогональны, постольку они могут быть представлены разными подпространствами в $\{\psi_k\}$. Другими словами, $H = \{\psi_k\}$ разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств $H = G \oplus F$, см. более подробно 10.6. $\implies$ построить подпространство, **натянутое** на векторы $\text{span}\{F, G\}$, в котором $F(t)$, $G(t)$ будут базисными векторами Ψ_1, Ψ_2 . Этого можно добиться через **процесс Грама-Шмидта**. В результате получится $(\Psi_1, \Psi_2) = 0$.

Из равенства Парсеваля-Стеклова 1.4 следует, если $f(t)$ и $g(t)$ не коррелируют между собой, то это означает их ортогональность $\langle f(t), g(t) \rangle = 0$, а также ортогональность их спектров $\langle (F(w), G(w)) \rangle = 0$ в частотной области. Другими словами, только что названные функции не перекрываются в пространстве $\mathcal{L}_2(G)$.

Выше был выбран базис из ортонормальных функций $\{\psi_k\}$ с весом 1.1, произведена частичная упорядоченность положительных целочисленных собственных значений (энергии) 4.11 по возрастанию.

По условиям гипотезы Голдбаха-Эйлера, рассматривается подмножество чётных натуральных чисел, то есть N составное число. Не меняя общности сопоставим N статистический вес Γ некоторой стационарной термодинамической системы, описываемой уравнением Шрёдингера.

Сохраняющее скалярное произведение векторов унитарное представление группы симметрии, описываемое матрицей представления, указанной термодинамической системы будет вполне приводимым.

Последнее утверждение следует из того, что N составное число.

В ортонормальной системе в силу соотношения ортогональности волновых функций 1.2, соответствующих разным собственным значениям, статистические веса, разных микросостояний $\Delta\Gamma_i$ и $\Delta\Gamma_j$ являются независимыми случайными величинами, в частности по причине флуктуаций - см. 13.

Преобразование Лапласа - это линейный оператор $Lu = F$ с областью определения $\mathcal{M}_L$. Обозначим с помощью $\mathcal{R}_L$ - область значений оператора L . Обратное преобразование Лапласа находится через обратный линейный оператор $u = L^{-1}F$. Легко доказать, что системы функций $\{\psi_k\}$ и $\{L\psi_k\}$ одновременно линейно независимы §1 [ЖВ22].

Статистическая сумма Z_i представляет собой (бес) конечную циклическую группу порожденную элементом $e^{-\beta E_i}$ (вариант зависит от применяемой математической модели: в физике $\mathbb{Z}$ систем с бесконечной энергией, фазовое пространство дискретно, функция Ψ , являющаяся решением уравнения Шрёдингера финитна).

Одновременно статистическая сумма Z_i представляет собой диагональную матрицу с элементами на основе ряда 4.21.

Базисным векторам соответствуют статистические суммы, представляющие собой абелевы группы, и группопорождающие элементы, на основе ряда простых чисел.

Почему операторы наблюдаемых в квантовой механике унитарны либо антиунитарны см. в 3.1.

[ЖВ22]: Жаринов и др. (2022), Уравнения математической физики

В данном случае для $\Psi_1, \Psi_2 - p_1, p_2$ соответственно, см. 4.23.

Статистический вес остается постоянным при преобразованиях Фурье (Лапласа), в частности, это следует из равенства Парсеваля-Стеклова [ЖВ22]:

$$\langle f, g \rangle^2 = |\Psi_1(w)|^2 + |\Psi_2(w)|^2. \quad (2.2)$$

Что понятно и без указанной формулы в силу наперед постулируемого при доказательстве постоянства энтропии 8.2.

По теореме о квантовой природе p -чисел 5 для дискретного энергетического спектра гамильтониана исследуемой системы H , $\exists$ базис в канонических переменных такой, что на главной диагонали соответствующей статистической матрицы в энергетическом представлении будут расположены корни, равные обратным значениям ряда простых чисел: $\langle \bar{\psi}_n^* \bar{\psi}_n \rangle = \frac{1}{p_n}$, где $p_n = e^{\beta E_n}$, $\beta = \frac{1}{T}$ обратная величина от абсолютной температуры в энергетических единицах, E_n - собственное значение гамильтониана $\hat{H}\bar{\psi}_n = E_n\bar{\psi}_n$, где $\bar{\psi}_n(q)$ - коэффициент разложения Ψ по Фурье-гармонике 1.16. При этом кратность повторения каждого корня будет соответствовать кратности энергетического уровня исследуемой системы. Разным собственным функциям $\bar{\psi}_n$ соответствуют разные простые p_n . Каждый статистический вес $\Delta\Gamma_i$ и каждая статистическая сумма $\tilde{Z}(\beta)_i$ будут при этом представлять смежный класс изоморфных групп.

Выше было показано, что без ограничения общности уровни энергии исследуемой системы можно считать целочисленными, эквидистантными, а множество группой - 4.1 вычетов по сложению.

С позиции теории групп слагаемое вида $p = e^{\beta E}$, соответственно $\frac{1}{p} = e^{-\beta E}$ в некоторой степени, присутствующее в формуле Гиббса, в Z - сумме, является группообразующим элементом конечной циклической группы, при этом порядок группы как раз равен простому числу - см. сноску на полях 5.2.

$\Rightarrow$ дифференциалы статистического веса (число микросостояний) с правой стороны 2.2 равны p_1, p_2 соответ-

[ЖВ22]: Жаринов и др. (2022), Уравнения математической физики

ственно, и в сумме они как раз образуют статистический вес слева того же уравнения.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \text{diag} \left\{ 1, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_1^2}, \dots, \frac{1}{p_1^{p_1-1}} \right\} & p_2 &= e^{\beta E_2} \\ Z_2 &= \text{diag} \left\{ 1, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_2^2}, \dots, \frac{1}{p_2^{p_2-1}} \right\} & p_2 &= e^{\beta E_2} \\ & & p_1 &\neq p_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Легко убедиться, что произведению описанных статистических сумм соответствует дискретный спектр собственных значений (резонансных частот / энергии) общим числом $p_1 + p_2$.

Действительно, спектр 2.3 для $H = G \oplus F$ является результатом объединения спектров $G(w)$ и $F(w)$. Совершенно аналогичная логика работает для квантовых состояний - микросостояний см. 2.17. См. также [Сад04]

[Сад04]: Садовничий (2004),
Теория операторов

И это понятно: для сигналов, которые не коррелируют между собой, соответствующие им фазовые пространства складываются, а не перемножаются. В спектральной области (после преобразования Фурье/Лапласа) это означает, что их энергии (или мощности) складываются, а не интерферируют. С позиции квантовой механике отсутствует состояние запутанности. Поэтому:

$$\text{span} \{H\} = \text{span} \{F\} \oplus \text{span} \{G\} \quad (2.4)$$

Другими словами, при помощи замены базиса с помощью унитарного преобразования, сохраняющего скалярное произведение векторов, фазовое пространство раскладывается в прямую сумму подпространств. В этом новом базисе прежние векторы $F(t)$, $G(t)$ становятся базисными векторами Ψ_1, Ψ_2 . Поскольку подпространство инвариантно, замкнуто относительно линейных операций можно сделать вывод об отсутствии кратных собственных значений (кратных частот, вырожденных уровней энергии нет).

При делении возникает как минимум два слагаемых. Именно поэтому минимальное число слагаемых при разложении произвольного составного чётного числа равно

двум - см. в формулу 2.2 - как раз и будет статистическим весом полной системы Γ .

Верно и обратное, если в полной ортонормированной системе фазовое пространство разложить в прямую сумму подпространств, то образованные подпространства будут инвариантными и ортогональными по отношению друг к другу, что равносильно отсутствию корреляции сигналов $\implies$ возможности разложения любого четного числа на два и более простых.

Таким образом любое чётное число, большее двух, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел.

АВС-гипотеза глазами физика

1 Введение

АВС-гипотеза в теории чисел была сформулирована независимо математиками Дэвидом Массером в 1985 году и Джозефом Эстерле в 1988 году. (Далее по тексту: [АВС-гипотеза](#)). Формулировка Гипотезы заключается в следующем. Для любых положительных целых взаимно-простых чисел a, b, c , удовлетворяющих уравнению $a + b = c$, произведение радикалов чисел АВС обычно ненамного меньше, чем C . Это можно выразить более точно с помощью формул $\max(a, b, c) < K_\epsilon \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon}$, где K_ϵ зависит только от некоторого положительного действительного числа ϵ . Функция [Rad](#) - это радикал чисел a, b, c , равный произведению простых сомножителей, образующих эти числа, но возведенных в первую степень, например, $\text{Rad}(8) = \text{Rad}(2^3) = 2$, $\text{Rad}(1000000) = \text{Rad}(2^6 * 5^6) = 30$.

Эквивалентная формулировка АВС гипотезы включает в себя показатель качества тройки

$$q(a, b, c) = \frac{\log(c)}{\log \text{Rad}(abc)} = \frac{\ln(C)}{\ln \text{Rad}(abc)} \quad (1.1)$$

которое определяется следующим образом: для $\forall$ положительного действительного числа $\epsilon \exists$ только конечное число троек a, b, c из взаимно простых натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению $a + b = c$, таких, что $q(a, b, c) > 1 + \epsilon$.

Выдающиеся математики западного мира потратили много сотен страниц на поиск доказательств, и процесс поиска доказательств продолжается.

1 Введение	119
2 Ключевая идея доказательства	119
3 Инженерный подход. Конструкция	123
4 Основная теорема арифметики	124
5 Микросостояние и макросостояние системы	126
6 Фазовое пространство. Плотность распределения вероятности	127
7 Квантовая природа простых чисел	129
8 Теорема Лиувилля. Энтропия	129
9 Радикалы чисел a, b, c и фазовое пространство	133
10 Линейные пространства. Функции от матриц	137
11 Произвольные A, B, C и квантовая механика	147
12 Аналогии из систем ЛДУ	147
13 Флуктуации	150
14 Функции Чебышёва и энтропия	160

2 Ключевая идея доказательства

Давайте рассмотрим пример производства партии заводской продукции, например шкафа купе, где ширина каж-

Обратите внимание строчные буквы здесь обозначают случайные величины.

дой двери соответственно: $A + B = C$ сантиметров.

Это эталонное значение, но на практике возможны как **систематические**, так и **случайные** ошибки. Допустим, благодаря менеджменту качества продукции систематические ошибки устранены, но остаются неизбежные случайные погрешности за счет неконтролируемых факторов.

Научный поиск

АВС-гипотеза в теории чисел была сформулирована независимо математиками Дэвидом Массером в 1985 году [MC85] и Джозефом Эстерле в 1988 году.

[MC85]: Masser и др. (1985), «Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory / W. W. L. Chen. — London:»

[Худ70]: Худсон (1970), Статистика для физиков

Предположим, что закон распределения ширины каждой двери - независимых случайных величин имеет одинаковое стандартное отклонение σ , а их математические ожидания соответственно равны $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$. Из основ математической статистики ([Худ70]) мы знаем, что погрешность измерения в последней формуле равна: $\sim \frac{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2}}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{N}}$, где N - количество партий продукции, использованных в эксперименте - это **размер выборки**.

Таблица 2.1: Гомоморфизм алгебр

Трудность понимания →			
Простые числа $2.3.5.7.11 \dots a = \prod_p p^{\alpha(p)}$	Целочисленные многочлены $f = c \prod_p p^{\alpha(p)}$	Системы ЛДУ. Матрицы $y = A(t)y$	Q=Квантовая механика. Линейные операторы $\hat{H}\psi = E\psi$ и формула энтропии $S = -\sum_i w_i \ln(w_i)$
Простое в степени k Основная теорема арифметики	неприводимые многочлены $(\lambda - a_i)^k$ Возможность алгебраических операций	$R = R_1 \oplus R_2 \dots \oplus R_i$ Инвариантные подпространства. Характеристический многочлен. Описание динамических процессов	Вырожденный энергетический уровень. Моделирование микромира
← Основания			

От этого простого примера мы можем перейти к доказательству АВС-гипотезы. Для этого необходимо применить основы теории арифметики, перейти к простым

целочисленным многочленам и линейным отображениям, **жордановым** матрицам и квантовой механике. Алгебры всего вышеперечисленного находятся в отношениях **гомоморфизма**. Одни и те же простые числа, взятые из цепочки $Rad(abc)$, играют роль **корней** целочисленного многочлена, **характеристического многочлена** матрицы линейного отображения, **корневых векторов линейного пространства**, разложенных на прямую сумму **инвариантных подпространств**, и собственных значений для матрицы линейного отображения, гамильтиана оператора квантовой системы.

Сосредоточимся на собственных значениях или корнях и убедимся, что среднее значение логарифма матриц, т.е. среднего значение суммы элементов на главной диагонали, от так называемого **следа** матрицы, не изменяется даже в случае появления кратных корней из той же цепочки простых чисел в первой степени $lnRad(abc)$. Если последнюю формулу разделить на число элементов на главной диагонали то получится энтропия исследуемой системы S .

Поскольку энтропия - такая же аддитивная величина, как и число частиц в изолированном сосуде, и обе величины являются так называемыми **интегралами движения**, легко вычислить относительное стандартное отклонение квадрата $\sim \frac{1}{\sqrt{S}}$, где S - энтропия частицы. исследуемой системы. Осталось вычислить $S = \frac{lnRad(abc)}{L}$, где L - длина главной диагонали (ненулевых элементов) матрицы и одновременно количество простых чисел в цепочке 1.1. Как уже было рассмотрено выше в главе дзета-функция Римана 3 эта длина равна числу группообразующим элементов - 7 и определяется функций Чебышёва $\phi(\Gamma)$ от статистического веса.

Важно сделать решающий шаг к статистической матрице системы в **Гильбертовом пространстве**, где размер матрицы бесконечен. При появлении нескольких корней вероятность обнаружения микрообъекта в заданном состоянии "размазывается" по главной диагонали статистической матрицы системы в соответствии со степенью корней (вырождением энергетического уровня). Это доказывает теорему и позволяет нам оценить так называемое **качество тройки** $q(a, b, c)$, но более подходящим термином будет **дефект** или **флуктуация** ограниченной сверху функцией

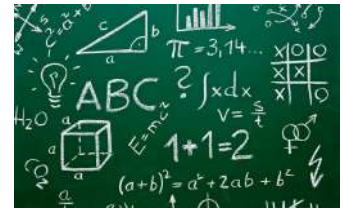


Рис. 2.1: ABC гипотеза объясняется с позиции школьных знаний: погрешности измерений в эксперименте, I и II начал термодинамики, принципа неопределённости из квантовой механики, линейных отображений, законов сохранения энергии-импульса

с нормальным распределением (речь идёт об энтропии исследуемой системы) и применить теорему Чебышёва, как это подробнее будет рассказано ниже.

[Moc21]: Mochizuki (2021), «Mochizuki's proof of ABC-conjecture.»

Знакомьтесь: Шиничи Мочизуки (Shinichi Mochizuki) - математик из университета Киото [Moc21]

500 страниц прочитали 10 чел. на Земле

Доказательство ВТФ в 120-1140 стр. страниц Эндрю Уайлса - это ещё не предел. Доказательство ABC conjecture ABC-гипотезы в пятьсот страниц занимает работа японского математика Шиничи Мочизуки (Shinichi Mochizuki), занимающегося теорией чисел и арифметической геометрией в университете Киото.

Словом, даже не зная функции распределения простых чисел $\pi(x)$, легко сделать несложные оценки, которые оказываются достаточными для доказательства ABC-гипотезы.

[Сел03]: Селиванов (2003), Поиск ошибочного и правильного

Двигаясь от эксперимента, от прикладной математики, мы сделали фундаментальные обобщения. Почему? - потому что мир материален, и физика микромира и макромира одинакова, действуют **принцип соответствия** текста и **принцип неопределенности Гейзенберга**. Таким образом, простые числа моделируют систему, состоящую из подсистем, которые не взаимодействуют, но связаны общим ресурсом - фазовым пространством. К сожалению, ряд учёных отождествляют понятие взаимодействие и связь, что является ошибочным: **обособленность есть отсутствие связи, но не просто отсутствие, а разъединённость** - [Сел03]. В частности, мы можем говорить о смеси идеальных газов. В последнем случае сосуд также является общим ресурсом.

Трудно переоценить место простых чисел в физических законах, которые определяют окружающий материальный мир и, в широком смысле, нашу Вселенную. Смотрите таблицу (2.1). Именно простые числа позволяют связать систему, **надсистему** и **подсистему**.

3 Инженерный подход. Конструкция

Будем отталкиваться от авторского доказательства ВТФ изложенного во второй главе, где использован инженерный подход и конструкция в виде трёх вложенных друг в друга концентрических шаров (n-кубов) центры которых помещены в начало координат. (Поиск доказательства в n-мерном пространстве бОльшей размерности необычайно продуктивен [ЯН12]) Ключевыми моментами этого доказательства являются: центральная симметрия, концепция слоёв, объединяющих множество элементов, попарно не пересекающиеся классы эквивалентности, возможность гомеоморфизма фигур только одинаковых размерностей и дискретность пространства $\mathbb{Z}$, где применимы постулаты Евклида (роль точек могут принять на себя гиперкубики - элементы 1^n), а также аксиомы топологии. Шар гомеоморфен кубу, а сфера — слою кубоида, определяемому как разность множеств в виде концентрических кубоидов с ребрами отличающимися на две единицы по каждой оси координат (т.е. единичной толщины с учетом движения взгляда исследователя вдоль и против оси).

[ЯН12]: Яу и др. (2012), Теория струн и скрытые измерения Вселенной

Из условий симметрии исследуемой конструкции в уравнении, соответствующей АВС-гипотезе найдется хотя бы одно слагаемое степени не выше двух. В противном случае существовали бы три многообразия соответствующих формуле ka^n с основанием в виде гиперкуба аn степени $n \geq 3$ и нашлись бы такие коэффициенты в виде рациональных чисел k_1, k_2, k_3 с условием $k_1x^n + k_2y^n = k_3z^n$ и слои - сферы, принадлежащие соответственно кубоидам А, В и С размерностью n-1 для которых:

$$k_1 Sphere_A + k_2 Sphere_B = k_3 Sphere_C \quad (3.1)$$

Здесь поэлементно сравниваются меры (более привычно для школьника: объемы, площади, длины для случая $n = 3, 2, 1$ соответственно) и подразумевается система уравнений отдельно по каждой размерности от 1 до n-1 поскольку размерность сферы (слоя) на единицу меньше охватываемого ею шара (куба). Заметим, что во избежании в дальнейшем смешения обозначения с энтропией обозначим слои Sphere. Для случая $n \geq 3$ одновременное сопоставление двух и более попарно не пересекающихся классов эквивалентности (размерности элементов от 1 до n-1,

как например гиперплоскости $a_1 \cdot 1^{n-1}, a_2 \cdot 1^{n-2}, a_3 1^{n-3} \dots$ и аналогично гипермеридианы на сфере) приводит к системе уравнений, неразрешимой в силу неравенства треугольника и исключения тривиального случая нулевого катета. (Сумма катетов больше чем длина гипотенузы). От краткого изложения идеи доказательства ВТФ, вернемся к АВС-Гипотезе.

4 Основная теорема арифметики

[AP87]: Аэрленд и др. (1987), Классическое введение в современную теорию чисел

Согласно основной теореме арифметики [[AP87]] каждое из тройки чисел в выражении $A + B = C$ может быть разложено на простые сомножители, допускаются степени выше единицы, но по условиям АВС-гипотезы, повторяющиеся сомножители в этом разложении исключаются в силу отсутствия общих делителей.

$$a + b = c \iff a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k} * 1^{n-t} + b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \dots b_l^{\beta_l} * 1^{n-u} = c_1^{\gamma_1} c_2^{\gamma_2} \dots c_m^{\gamma_m} * 1^{n-v} \quad (4.1)$$

Все сомножители с индексами являются простыми числами.

Definition 4.1 В формуле выше все сомножители с нижними индексами являются простыми числами. Наряду с литерами a_i, b_j, c_k будет использоваться p_i для обозначения простого числа.

Для соблюдения правил размерности элементов в пространстве целых чисел, определяемом как n -кратное Декартово произведение оси целых чисел $Z^n = Z * Z * \dots * Z$, каждое слагаемое в формуле выше умножается также на сомножитель в виде 1^{n-t} элементарного единичного куба с той целью, чтобы каждое слагаемое имело размерность, равную размерности евклидова пространства n , в которое вложены исследуемые многообразия разных размерностей.

(От аналогии с конструктором Lego можно попробовать перейти к аксиомам топологии ([МУ73], [Тре01] и постулатам Евклида.)

[МУ73]: Милнор и др. (1973), Дифференциальная топология

[Тре01]: Трельфалль (2001), Топология. Зейферт Г Трельфаль В

Другими словами, суммы показателей степеней всех множителей в формуле выше равны соответственно $t, u,$

v , что как раз соответствует размерности многообразий A, B, C :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = t, \beta_1 + \dots + \beta_l = u, \gamma_1 + \dots + \gamma_m = v \quad (4.2)$$

Легко понять размерность каждого члена и минимально необходимую размерность $n = \max(t, u, v)$ (4.1) евклидова пространства, в которое могут быть вложены исследуемые кубоиды согласно приведенной формуле.

Definition 4.2 Ниже будет использоваться общее число простых сомножителей названной формулы, оно равно $L = k + l + m$.

Развивая принятый в Главе 2 инженерный подход, сопоставим выражение (4.1) с множеством в виде трёх многообразий, каждый в форме многомерного параллелепипеда или кратко — **кубоида** в конечномерном евклидовом пространстве, с заданной метрикой и мерой, именуемом далее просто евклидовым пространством.

В этом представлении приведенная выше формула (4.1) также может быть записана как условие гомеоморфизма многообразий - кубоидов, обозначаемых большими буквами $A \cup B \equiv C$, а исследуемый объект представляет собой множество трёх кубоидов с разными рёбрами, длины которых являются простыми числами как раз из формулы 4.1

Благодаря центральной симметрии, легко определить центр масс каждого кубоида, предполагая, что он заполнен однородным материалом. Совместим эти центры с началом координат и сориентируем (гипер)границы кубоидов перпендикулярно осям. В дальнейшем мы будем считать исследуемую конструкцию концентрическими кубоидами. В каждом из кубоидов легко увидеть гиперплоскость зеркальной симметрии размерности на единицу меньшей, чем исследуемый кубоид, ортогональные осям координат и проходящие через начало координат. Их число для каждого кубоида равно числу осей симметрии $\Rightarrow$ равно показателю степени множителей, образующих кубоид.

$\exists$ непрерывная обратимая функция эквивалентности f , отображающая каждый элемент в виде элементарного куба 1^n из множеств A и B в C $f(A, B) \rightarrow C$, что также можно выразить с позиции топологии соответствует понятию гомеоморфизма следующих фигур:

$$A \equiv C \setminus B \quad (4.3)$$

при этом $\exists$ обратная функция $f^{-1}(C, B) \rightarrow A$. Исключая очевидный случай первых степеней АВС-гипотезы, не меняя общности, в дальнейшем полагаем, что размерность $\dim(A) \leq 2$, а в свою очередь $\dim(B)$, $\dim(C)$ - кубоиды размерности два и более.

Вывод о размерности что $\dim(A) \leq 2$ пригодится в будущем при оценке экстремумов $q(a, b, c)$

Помним, что размерность кубоида определяется суммой степеней простых сомножителей в 4.2 Для $\exists f$ необходимо обеспечить возможность взаимного сокращения слоёв более высоких размерностей, чем два, а также сокращение числа гиперплоскостей симметрии до двух (Отметим, что операция сокращения, перестановок, перемещения $1^n \rightarrow 1^n$ возможны именно в отношениях эквивалентности. Однородность евклидова пространства постулируется).

Какому физическому явлению может соответствовать формула (4.1)? Она моделирует некую систему, состоящую из подсистем, между которыми отсутствуют связи, но определенным образом поделён общий ресурс. С позиции школьных знаний для поиска доказательства АВС-гипотезы особенный интерес представляют законы термодинамики. Общим ресурсом могут быть энергия, фазовое пространство, энтропия, число частиц и др.

5 Микросостояние и макросостояние системы

Рассмотрим систему, состоящую из смеси идеальных газов, молекулы которых не взаимодействуют между собой. Следствием этого в частности, является закон Дальтона, согласно которому давление смеси химически не реагирующих между собой газов равно сумме парциальных давлений каждого из газов — и это становится понятно в силу отсутствия межмолекулярного взаимодействия.

Автор предлагает рассматривать АВС-гипотезу с позиции фазового пространства термодинамической системы насчитывающей $2s$ измерений, по координатным осям которого откладываются значения s обобщенных координат q и s импульсов p данной системы (s - число степеней свободы) в уравнении Гамильтона, известных школьнику из курсов механики под наименованием теорема о кинетической энергии. Операторная форму уравнения Гамильтона в канонической форме достаточно красива, универсальна, описана в литературе, но требует небольшого опыта работы с частными производными [Зел10] и [Мыш72]]. Ещё более точно применение статистического подхода в физике предполагает знание основ квантовой механики [Фер00], понимание принципа неопределенности Гейзенберга $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$, представление об уравнении Шредингера [Зел02], о матрице плотности вероятности, об операторе гамильтониан, знание замечательных свойств эрмитовых операторов, правил работы с коммутаторами и скобками Пуассона [Мес78], основных формул термодинамики, но ниже изложение будет опираться преимущественно на знание материалов школьной программы.

[Зел10]: Зельдович (2010), Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике ФИЗМАТЛИТ

[Мыш72]: Мышкис (1972), Высшая математика специальные курсы

[Фер00]: Ферми (2000), «Лекции по квантовой механике.»

[Зел02]: Зелевинский (2002), Лекции по квантовой физике

[Мес78]: Мессиа (1978), Квантовая механика. Том 1.

Попробуем угадать, какому классу физических явлений соответствует АВС-гипотеза? Начнем с понятия **микросостояние** - это конкретная конфигурация системы, которая описывает точные положения и импульсы всех отдельных частиц, составляющих систему. Каждое микросостояние имеет определенную вероятность возникновения в процессе движения молекул. **Макросостояние** системы относится к ее макроскопическим свойствам, например таким свойствами являются температура, давление, объем и плотность. Кратко повторим основные сведения из физики.

6 Фазовое пространство. Плотность распределения вероятности

Каждая точка фазового пространства отвечает определенному микросостоянию системы. В ходе эволюции системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве некоторую фазовую траекторию. Про-

изведение дифференциалов:

$$dqdp = dq_1dq_2\dots dq_sdp_1dp_2\dots dp_s \quad (6.1)$$

рассматривается как «элемент объема» фазового пространства $\Delta\Gamma$. Применительно к исследуемой формуле, учитывая форму кубоида и равенстве приращения линейной функции её дифференциалу, далее будет употребляться наряду с обозначением дифференциала знак Δ .

Выразим вероятность и плотность вероятности ρ обнаружить объект в заданных координатах фазового пространства через очевидную формулу:

$$dw = \rho(q_1, q_2, \dots q_s, p_1, p_2, \dots p_s) dp dq \quad (6.2)$$

- вероятность отыскать исследуемый объект в заданных бесконечно малых интервалах координат и импульсов в пределах: $q_i \dots q_i + dq_i, p_i \dots p_i + dp_i$. При этом объем фазового пространства выражается через энергию по формуле:

$$\Delta\Gamma = \frac{d\Gamma(\bar{E})}{dE} \Delta E \quad (6.3)$$

Выше через $\Delta\Gamma(E)$ обозначается число квантовых состояний с энергиями, меньшими или равными E . Далее приведена плотность вероятности ρ и записано условие нормировки:

$$\sum_{\Omega} \rho(\bar{E}) \Delta q \Delta p = 1 \quad (6.4)$$

интеграл по всем вероятностям состояний подсистемы образует **полную группу событий** $\Rightarrow$ для функции плотности вероятности $W(E)$:

$$\int W(E) dE = 1 \dots \sum W \Delta\Gamma = 1 \quad (6.5)$$

Формулы, приведенные выше, помогает найти интересное число состояний с энергией между $E \dots + dE$. Предполагается выбор такой инерциальной системы отсчета, где суммарный импульс и момент импульса всей исследуемой подсистемы равны нулю. Знак тире над энергией $\bar{E}$ обозначает среднее значение энергии подсистемы по всем квантовым состояниям. Здесь и ниже обозначение

Δq и Δp представляют собой произведения вида (6.1) по всем степеням свободы.

7 Квантовая природа простых чисел

В силу самой природы квантовой механики и основанной на ней статистической физике, речь может идти лишь о нахождении распределения плотности вероятности для координат или импульсов в отдельности, а не тех и других вместе, поскольку координаты и импульсы частицы в общем случае не могут одновременно иметь определенных значений в силу принципа неопределенности Гейзенберга. Искомые распределения вероятностей должны учитывать как статистическую неопределенность, так и неопределенность, присущую непосредственно квантовомеханическому описанию.

8 Теорема Лиувилля. Энтропия

По [теореме Лиувилля](#) объем фазового пространства обладает свойством [инвариантности](#) по отношению к каноническим преобразованиям, сохраняющим [гамильтониан](#) и [интегралы движения](#), в частности энергии, импульса, момента импульса. [[Лан04](#)] [стр. 192-193]

[[Лан04](#)]: Ландау (2004), Теоретическая физика. Том 1. Механика

Для квазиклассического случая, где законы квантовой механики можно заменить уравнениями Гамильтона, которые являются переформулировкой хорошо известных из школы уравнений Ньютона. При этом объем фазового пространства

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi)^s} \quad (8.1)$$

Величину $\Delta\Gamma$ называют [статистическим весом](#) микроскопического состояния подсистемы, а ее логарифм — энтропией. В свою очередь, энтропия определяется через среднее значение, обозначаемого скобками $\langle \rangle$, логарифма $\Delta\Gamma$ как для случая описания исследуемой системы с позиции её квантового состояния от функции распределения плотности вероятности по энергии E_i , так и в

квазиклассическом подходе от плотности вероятности, по формулам:

$$S = -\langle \lg w(E_i) \rangle = -\sum_i w_i \ln(w_i) \quad (8.2)$$

$$S = -\langle \ln [(2\pi\hbar)^s \rho] \rangle = -\int \rho \cdot \ln [(2\pi\hbar)^s \rho] dp dq \quad (8.3)$$

Определенная таким образом энтропия, как и сам статистический вес есть безразмерная величина. (В школьной физике и в некоторых учебниках теоретической физики в последней формуле перед знаком логарифма ставят постоянную Больцмана $k_B = 1.38 \cdot 10^{23}$ Дж/К, что позволяет измерять абсолютную температуру в Кельвинах, а не энергетических единицах, но применительно к Гипотезе, постоянную Больцмана удобнее будет в некоторых случаях опускать, что легко догадаться из контекста).



Рис. 8.2: Людвиг Больцман 1844–1906 выдающийся физик-теоретик, со-основатель статистической механики. Объяснил II начало термодинамики, внёс значительный вклад в кинетическую теорию газов.

Для простоты рассмотрим замкнутую систему в целом (т.е. изолированную от иных систем, например, помещенную в термостат), где определены $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3 \dots$ — статистические веса ее различных подсистем. Если каждая из подсистем может находиться в одном из $\Delta\Gamma_\alpha$ состояний, то фазовые объемы подсистем перемножаются, а энтропии подсистем складываются что иллюстрируют выражения:

$$\Delta\Gamma = \prod_\alpha \Delta\Gamma_\alpha; \dots S = \sum_\alpha S_\alpha \quad (8.4)$$

Другими словами, формула описывающая фазовое пространство допускает разделение переменных. На практике часто приходится иметь дело со случаями, когда квазиклассическим является не всё микроскопическое движение частиц, а лишь движение, соответствующее части степеней свободы, в то время как по остальным степеням свободы движение является квантовым (так, например, может быть квазиклассическим поступательное движение молекул при квантовом характере внутримолекулярного движения атомов). Формула 4.1 может быть представлена в виде:

$$e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2} \dots e^{\alpha_k x_k} + e^{\beta_1 y_1} e^{\beta_2 y_2} \dots e^{\beta_l y_l} = e^{\gamma_1 z_1} e^{\gamma_2 z_2} \dots e^{\gamma_k z_l} \quad (8.5)$$

где показатели степени x, y, z , подобраны так, чтобы выделить только одно простое число из перечисленных в формуле (4.1), что легко достигается путем взятия натурального логарифма. Забегая вперед, отметим, что в классической механике переменная w_k , от которой зависит энтропия не может быть выбрана однозначно, поскольку в классической физике энтропия определяется с точностью до произвольного слагаемого.

Выбор обобщенного импульса Δp_i либо обобщенной координаты Δq_i на роль сомножителя, учитываемого в формуле (6.2) произволен. Для простоты ограничим объем исследуемой смеси газов q единицей и будем считать все $\Delta q_i = 1$, что означает выбор исследуемого малого элемента объема в системе, численно равного единице (нанометры, ангстремы либо атомная единица длины a_0 , применяемая в атомной и квантовой физике, т.н. боровский радиус — ближайшей к ядру орбиты невозбужденного электрона атома водорода H в модели атома $5,29 \cdot 10^{-11}$ м).

АВС-Гипотезу можно рассматривать как математическую интерпретацию сложной системы, состоящей из простых подсистем, где выполняется принцип аддитивности энтропии и перемножения объемов фазовых пространств подсистем.

Формула (8.4) пригодна для выражения закона сохранения энтропии подсистемы при разделении переменных и адиабатических процессах, достаточно медленных по сравнению с временем релаксации / установления локального равновесия. На практике это время в лабораторных условиях протекает быстро и сопоставимо со временем распространения звуковой волны в сосуде с газом (330 метров в секунду при нормальном атмосферном давлении и температуре 20 градусов Цельсия для воздуха - сотни метров в секунду в зависимости от параметров газа либо смеси).

Говоря об экспоненте в формуле (8.5), отметим, что известные формулы распределения плотности вероятности нахождения частиц выражены через экспоненту: как



Рис. 8.3: Джеймс Клерк Максвелл 1871-1879. — английский физик, создатель классической электродинамики, со-основатель статистической физики.

[ЛЛ69]: Ландау и др. (1969), Курс общей физики. Механика и молекулярная физика

[Кар76]: Карцев (1976), Максвелл/Серия: Жизнь замечательных людей.- М

например в изучаемых в физико-математических школах [ЛЛ69] распределении Больцмана $n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$, т. н. **барометрической формуле** - и **распределении Максвелла** [Кар76]:

$$dw = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \quad (8.6)$$

Обе формулы дают представление о **статистическом ансамбле**, который следует рассмотреть детальнее. См. в приложении 12 Каноническое распределение Гиббса 3 Для смеси идеальных газов приведенные в этом распределении формулы остаются в силе, только вместо N подставляется количество молекул соответствующего газа. Для смеси газов обладают свойствами аддитивности следующие термодинамические переменные: число молекул, энергия, энтропия, парциальное давление каждого газа термодинамический потенциал и ряд других. При этом объем и температура по правилам термодинамики одинаковы для всех молекул каждого газа из смеси. Отметим, что благодаря отсутствию взаимодействия между молекулами происходит суммирование значений энтропии и соответственно, перемножение объёмов фазовых пространств (8.4).

Легко проследить аналогию формулы (4.1) с логарифмом формулы 8.5 и убедиться в их подобии. Хотя формулы имеют небольшие отличия, но это не должно обескураживать. В формуле приложения имеется Большое каноническое распределение Гиббса для смеси идеальных газов 4.6, доступным для понимания и студентов 2-3 курсов физико-математического либо технического вузов языком. Рекомендуется ознакомиться и старшеклассникам с помощью преподавателя. Можно производить суммирование по всем состояниям энергетических уровней, а не молекул. Этот приём используется нами выше в распределении Максвелла 8.6. Состояние энергетических уровней определяется квантово-атомными параметрами молекулы, изучаемых на уроках химии в школе.

9 Радикалы чисел a, b, c и фазовое пространство

АВС-гипотеза оперирует понятием «качества тройки чисел» на основе натурального логарифма. (Допустим переход к натуральному логарифму путем одновременного деления числителя и знаменателя $\ln 10$).

Натуральный логарифм $\ln(x)$ подразумевается в основных формулах теории чисел и записывается просто как $\log(x)$.

Радикалу произведения чисел $Rad(abc)$ соответствует например смесь идеальных газов с невырожденными уровнями энергии, что достигается при достаточно низкой температуре, когда активированы только поступательные степени свободы и вращательные для многоатомных молекул. С учетом сказанного выше это будет означать первую степень простых чисел формулы (4.1).

За счет уравнения Клапейрона $PV = kNT$ можно контролировать температуру, давление газов регулируя начальную температуру, числу молекул смеси (концентрацию) и объем подсистемы. С помощью термодинамических соотношений легко рассчитывается энергия молекул газа и энтропия, а значит и объем фазового пространства $\Delta\Gamma_i = \exp(S(E_i))$. Далее можно подобрать $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3 \dots$ — статистические веса газов 1, 2, 3 в смеси соответственно равными простым числам формулы (4.1) в первой степени — радикалу $Rad(abc)$. Обозначим такое значение объема фазового пространства под $\Delta\Gamma_0$, а соответствующую ему энтропию

$$\Gamma_0 = \frac{Rad(abc)}{L} \quad (9.1)$$

где, в знаменателе этой дроби необходимо по определению энтропии (8.2) произвести усреднение значения логарифмов от значений по диагонали статистической матрицы, а длина этой диагонали или общее число элементов $L = k+l+m$ вычислена из формулы 4.1 и равна общему числу простых сомножителей в АВС-гипотезе. Если каждая из подсистем может находиться в одном из Γ_α квантовых состояний, то фазовые объемы подсистем перемножаются, а энтропии подсистем складываются.

При адиабатическом сжатии основное уравнение термодинамики примет вид внутренняя энергия газа уменьшается (увеличивается) как раз на величину произведенной

газом (над газом) работы. Согласно формуле первого закона термодинамики $dQ = dE + PdV$, где dQ — количество тепла, P — давление газа, dV — малое приращение объёма, сомножитель PdV равен произведенной работе. При адиабатическом процессе $dQ = 0$, теплового обмена нет, отсутствуют **диссипативные** процессы, а следовательно все изменения подсистемы остаются обратимыми и $dE = -PdV$.

Из школьного курса термодинамики известно, что при адиабатическом процессе соотношение между давлением и объемом / температурой и объемом соответственно приобретает вид

$$PV^\gamma = \text{const} \dots TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (9.2)$$

где $\gamma > 1$ — это частное от деления теплоемкости при постоянном давлении на теплоемкость при постоянном объеме газа $\frac{C_P}{C_V}$. При адиабатическом сжатии энтропия системы остается постоянной, но «включаются» вырожденные уровни энергии ϵ_k (удельной энергии в расчете на одну молекулу газа), за счет увеличения температуры.

Это сопровождается появлением степеней выше единицы в формуле (4.1). Обозначим такое статистическое состояние системы литерой $\tilde{D}$, символизирующей появление вырожденных энергетических уровней, а энтропию соответственно $S_{\tilde{D}}$. (детали раскрыты ниже). Далее выделим фазовый объем, соответствующий некоторым обобщенным координатам либо импульсам (например, связанными с квантовыми эффектами), в отдельные подмножества исследуемого фазового пространства: A, B, C в соответствии с индексами, перечисленными в формуле (4.1). Как было сказано выше, энтропия является аддитивной функцией.) В силу адиабатического сжатия, сохраняющего энтропию, и условий поставленного эксперимента получим:

$$\begin{aligned} \check{q}(a, b, c) &= \frac{\ln(c)}{\ln \text{Rad}(a) + \ln \text{Rad}(c-a) + \ln \text{Rad}(c)} \\ &\approx \frac{S_C \cdot m}{S_0 L} = \frac{S_C \cdot m}{(S_A + S_B + S_C)L} < 1 \quad (9.3) \end{aligned}$$

В этой формуле вычисляется функция $\check{q}(a, b, c)$, заданная на области положительных действительных чисел больше или равно двум $\mathbb{R} \geq 2$, совпадающая с исходным значением $q(a, b, c)$ на $\mathbb{Z}$.

С учетом ранее сделанного вывода после формулы 4.3 о размерности что $\dim(A) \leq 2$ будем считать независимой переменную a и сначала рассмотрим частный случай постоянства слагаемого c , изменяя лишь сомножители p_1, p_2 . Здесь подразумевается, что $a = p_1 \cdot p_2$ либо $a = p^2$. Тогда можно заменить выражение в знаменателе $\ln(\text{Rad}(a)) + \ln(\text{Rad}(c - a))$ на $\ln(p) + \ln(c - p)$ либо соответственно на $\ln(p) + \ln(c - p^2)$ (все постоянные сомножители вынесены в качестве константы отдельно и не играют роли при взятии производной для нахождения экстремума).

Задача о нахождении экстремума функции $\check{q}(a, b, c)$ при заданном c сводится к нахождению максимального и минимального значения знаменателя, где переменной частью является число p , при этом $c = \text{Const.} \Rightarrow$ минимум $\check{q}(a, b, c)$ достигается при $p = \frac{c}{2}$, для случая если $a = p_1 \cdot p_2$ искомый минимум будет $p = \sqrt{\frac{c}{3}}$, что легко понять из симметричного вхождения переменной части выражения под знаком логарифма в знаменателе, анализируя функцию вида $y = x(c - x)$ либо соответственно $y = x(c - x^2)$.

Перейдём от частного случая к общему. Легко установить, что $\check{q}(a, b, c)$ на расширенной области определения является непрерывной и дифференцируемой.

Работаем с тополого-алгебраическим телом

Если в некотором алгебраическом теле M имеется топология, т. е. имеется **сходимость**, иначе говоря, известно, что означает соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, а операции, имеющиеся в теле M , непрерывны в отношении этой топологии, то такое тело называется **тополого-алгебраическим**. [Пон86].

[Пон86]: Понтрягин (1986),
Обобщения чисел

Следовательно, можно вычислить производную и применить известную из школьной математики **формулу Ньютона - Лейбница** для верхней и нижней оценок значений непрерывной дифференцируемой функции на некотором интервале.

После знака равенства происходит переход к случайным (термодинамическим- статистическим) переменным. В числителей знаменателе приведено значение энтропии фазового пространства с учетом множителей m и $L = (k+l+m)$, выраженное через определение энтропии подсистемы C в составе объединяющей системы $D = A \cup B \cup C$ в условиях адиабатического процесса.

Линейный дифференциал для случая многих переменных

Задача о нахождении экстремума функции для случая многих переменных сводится отысканию градиента скалярной функции $\check{q} : M \rightarrow R$, определённой на тополого-алгебраическом теле $M = \{R^L | L \geq 2\}$ в L мерном пространстве $grad\check{q}$ - по количеству простых чисел формулы 4.1 - каждое простое число рассматривается как независимая случайная переменная (этот подход уже применялся при анализе гипотезы Леонарда Эйлера в17). Более глубокая связь простых и случайных переменных объясняется ниже в разделе Флуктуации. В 13.

Частная производная будет следующая

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{q}}{\partial p_i} &= \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial p_i} \frac{1}{\ln Rad(abc)} - \frac{\ln c}{(\ln Rad(abc))^2} \frac{\partial \ln p_i}{\partial p_i} \\ &= \frac{k}{p_i} \frac{1}{\ln Rad(abc)} - \frac{\ln c}{(\ln Rad(abc))^2} \frac{1}{p_i} \\ &= \frac{k - \check{q}}{p_i \ln Rad(abc)} \quad (9.4) \end{aligned}$$

Для вычисления заметим, что:

$$\ln C = \sum_1^L k_i p_i \text{ и } \ln Rad(abc) = \sum_1^L p_i.$$

В результате формула Ньютона - Лейбница обобщается на случай многих переменных с учётом скалярного произведения $(grad\check{q}, \Delta x)$ в L - мерном пространстве (размерность взята из формулы 4.1 или число простых чисел в $Rad(abc)$), где каждое простое число рассматривается как независимая случайная величина, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots)$.

Следствие: градиент функции $grad(\check{q})$ на всей области определения $\exists$ не обращается в бесконечность и при-

ращение $\Delta\check{q}$ может быть ограничено сверху и снизу некоторыми удобными для работы функциями. Ниже будет выбрана ограничивающая сверху функция, имеющая нормальное распределение.

Из математической статистики известно правило сложения дисперсии независимых случайных величин. Поэтому итоговый вывод неравенства $\check{q}(a, b, c) < 1$ приведенного выражения опирается в равной мере как на статистическую физику, так и математическую статистику. Полученное неравенство является строгим исходя из вида дроби. Знак приближения в формуле (9.3) тем точнее, чем больше значение энтропии.

Обращение к случайным переменным A, B, C, D и статистической физике / математической статистике помогло в получении верней оценки $\check{q}(a, b, c)$ и соответственно $q(a, b, c)$ - она не должна превышать единицу.

Тем не менее в ходе численных экспериментов [ABC] найден ряд максимальных значений $q(a, b, c)$ выше единицы. Как объяснить этот парадокс? - Автор убежден, что это явление обусловлено **флуктуациями**, как это объясняется ниже, в разделе (см. раздел 13), специально посвященной этому явлению.

Здесь снова появились случайные величины, обозначаемые заглавными A, B, C, D

[ABC]: ABChome (), Волонтерская сеть под названием ABChome посвящен распределенному вычислительному проекту, который должен был составить полный список всех троек ABC, состоящих из целых чисел, состоящих максимум из 18 цифр.

10 Линейные пространства. Функции от матриц

Для поиска доказательства ABC-гипотезы математическими методами необходимо использовать правила линейной алгебры, представления квантовой механики о волновой функции, операторную форму гамильтониана [Лан04], оценки энтропии [Куб07], Гл 10, 1.18] с помощью статистической матрицы [Лан02] 9, с. 28-29 в квантовомеханическом представлении. Стремительное развитие квантовых вычислений и криптографии способствует популяризации знаний о квантовой механике. Чтобы расширить кругозор школьника XXI века, было бы логично расширить программу средней школы основами квантовой механики, прибегая к аналогии с радиоволнами, спектрами сигналов. Много лет в школе на уроках химии

[Лан04]: Ландау (2004), Теоретическая физика. Том 1. Механика

[Куб07]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

[Лан02]: Ландау (2002), Теоретическая Физика В 10т. Том 5. Статистическая Физика.

изучается электронная конфигурация атома, расположение электронов в атоме по уровням и подуровням на основе общих представлений о квантовой механике.

Исходя из условий АВС-гипотезы следует выбрать аддитивную функцию. Наиболее подходящим кандидатом является энтропия, определяемая как логарифм фазового пространства (8.2). При адиабатических процессах объем фазового пространства сохраняется. Это простое утверждение является ключом к доказательству и практически не требует математических вычислений. Формула (4.1) подразумевает статистическое описание некоторой физической системы, состоящей из подсистем, выражающую аддитивное свойство общего ресурса для энергии, энтропии и др. термодинамических величин. Эти свойства обеспечивают разложение целых чисел a , b , c на простые, для которых $\text{НОД} = 1$. Из вводного курса теории чисел известно, что правила действуют для кольца целочисленных многочленов в некотором поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел $k[x]$. Такого вида многочлены обладают рядом свойств, аналогичных целым числам. $\exists$ гомоморфизм между алгеброй целых чисел и алгеброй многочленов для операций сложения, умножения. Ниже термины простой и неприводимый, применительно к многочленам, будут употребляться в качестве синонимов. Последовательное доказательство связи группы вычетов Z_n^+ с термодинамической системой см. в Главе 3 Пусть $f \rightarrow k[x]$, тогда существует однозначное разложение:

$$f = c \prod_p p^{\alpha(p)}, \quad (10.1)$$

где c - константа и произведение берется по неприводимым многочленам вида $(\lambda - a_i)^k$ [Кур13], [АР87], [Вей72]. Степени и константа определяются однозначно.

[Кур13]: Курош (2013), Курс высшей алгебры

[АР87]: Аэрленд и др. (1987), Классическое введение в современную теорию чисел

[Вей72]: Вейль (1972), Основы теории чисел

$$\begin{aligned} &(\lambda - a_1)^{\alpha_1}(\lambda - a_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - a_k)^{\alpha_k} q_1(\lambda) \\ &+ (\lambda - b_1)^{\beta_1}(\lambda - b_2)^{\beta_2} \dots (\lambda - b_l)^{\beta_l} q_2(\lambda) \\ &+ (\lambda - c_1)^{\gamma_1}(\lambda - c_2)^{\gamma_2} \dots (\lambda - c_m)^{\gamma_m} q_3(\lambda) = 1 \end{aligned} \quad (10.2)$$

В формуле выше записаны целочисленные многочлены, на основе неприводимых, они также являются взаимно простыми [МП22], что кратко выражено в формуле вы-

[МП22]: Манин и др. (2022), Введение в современную теорию чисел

ше: существуют многочлены q_1, q_2, q_3 , итоговая сумма формулы соответствует НОД (4.1) и равна 1. Для работы с целочисленными многочленами используется Алгоритм Евклида, как и для случая чисел.

Каждому многочлену из приведенных можно однозначно сопоставить линейное отображение $\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$) с характеристическим многочленом 10.2, корни которого взяты из формулы 4.1 - это будут как раз простые числа, входящие в $Rad(abc)$. Если линейное преобразование размерности n имеет n независимых собственных векторов, то принимая эти векторы в качестве базисных, мы приведём квадратную матрицу линейного преобразования к диагональному виду, при этом собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, будут линейно независимы, и можно подобрать такой базис, в котором такие векторы будут ортогональны. Для случая кратных корней имеем:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathcal{A})^k \mathbf{x} = 0 \quad (10.3)$$

путем элементарных преобразований матрицу линейного отображения можно привести к жордановой форме размером $k \times k$ соответствующей кратности k (высоте) корневого вектора [Мыш72], [Szi02].

Собирая всё вместе, определим в $\mathbb{R}^n$ линейное отображение на себя, задаваемое матрицей $\mathcal{D}$ в некотором базисе. характеристический многочлен которого является произведением характеристических многочленов линейных отображений из формулы 4.1. Матрица $\mathcal{D}$, соответствующая этому объединенному линейному отображению, будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

Собственные значения матрицы $\mathcal{D}$ — это результат объединения собственных значений матриц $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. В результате достигается однозначное разложение пространства $\mathbb{R}$ на [прямую сумму инвариантных подпространств](#) (порядок их следования не играет роли):

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4 \oplus R_5 \cdots \oplus R_L \quad (10.5)$$

[Мыш72]: Мышкис (1972), Высшая математика специальные курсы

[Szi02]: Szidarovszky (2002), Introduction to Matrix Theory: With Applications to Business and Economics

Множество всех корневых векторов, соответствующих собственному значению λ , образует инвариантное подпространство R_i .

Приравняем детерминант матрицы $\tilde{D}$ (тильда обозначает наличие кратных корней в характеристическом многочлене) и соответственно её характеристический многочлен нулю для поиска собственных значений и векторов:

$$\text{Det}\tilde{D} = \prod_{i=1}^{i=L} (\lambda - \lambda_i)^{k_i} = 0 \quad (10.6)$$

где L - число простых чисел в формуле (4.1) λ_i — это собственное/корневое значение линейного отображения $\tilde{\mathcal{D}}$ и соответственно матрицы $\tilde{\mathcal{D}}$. Из алгебраической теории матриц [Кур13], [Мал56] известно, что над λ - матрицами можно совершать элементарные преобразования, создавая тем самым подобные матрицы, но при этом остаются постоянными след матрицы т.е. сумма его элементов, расположенных на главной диагонали, и детерминант $\det$ - обе величины не зависят от базиса и являются инвариантами. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots \lambda_i$ - собственные значения матрицы, они как раз взяты из многочлена (10.2) с корнями из набора простых чисел (4.1), но с применением функции логарифма и усреднения по главной диагонали матрицы (подробнее в формуле (10.4)), все эти собственные значения различны, и не равны нулю по условиям АВС-гипотезы.

Definition 10.1 Известно, что детерминант матрицы равен произведению собственных значений, в чём не трудно убедиться, подсчитывая определитель диагональной матрицы непосредственно "в лоб".

В нашем случае с позиции термодинамики $\det \mathcal{D}$ соответствует статистическому весу в невозбуждённом состоянии термодинамической системы $\Gamma_0 = \text{Rad}(abc) = \det \tilde{\mathcal{D}}$ с невозбужденными энергетическими уровнями .

Поскольку мы рассматриваем квадратные матрицы и в силу свойства **коммутируемости матрицы** с собой, в ряде случаев, включая исследуемый, можно возводить λ матрицу $\tilde{\mathcal{D}}$ в степень, совершать над ней алгебраические операции, вычислять многочлены от матрицы.

[Кур13]: Курош (2013), Курс высшей алгебры

[Мал56]: Мальцев (1956), Основы линейной алгебры

Более последовательно правомерность данного подхода, применительно к приведенным статистическим суммам $\tilde{Z}$, обосновано в разделе 4.1.

По общему правилу гомоморфизма можно выбрать наиболее простую для понимания алгебру. (**Гомоморфизм** в категории алгебраических систем это отображение алгебраической системы A в B , сохраняющее основные операции и основные отношения.)

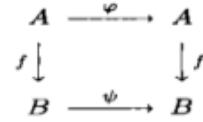


Рис. 10.4: Общее правило гомоморфизма над алгебрами. $A = \langle A, \phi \rangle$, $B = \langle B, \psi \rangle$, $f : A \rightarrow B$

В целом, от квадратной матрицы можно вычислять скалярные функции путем разложения в ряд Тейлора, но с некоторой спецификой [Мал56], 182-183]. В теории аналитических функций (т. е. имеющих производную комплексной плоскости из чего следует удивительный вывод о бесконечной дифференцируемости аналитической функции [Мыш72]. Известно, что ряд от комплексной переменной обладает свойством сходимости на некотором кольце сходимости $r < |z| < R$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ [15, стр. 64], за исключение полюсов.

[Мал56]: Мальцев (1956), Основы линейной алгебры

[Мыш72]: Мышкис (1972), Высшая математика специальные курсы

Вычислим логарифм от матрицы $\tilde{D}$ с уже кратными корнями (10.2). Здесь выбраны в качестве базиса различные собственные / корневые векторы, являющиеся простыми числами и поэтому матрица будет иметь **блочно-диагональный вид** (порядок следования клеток Жордана не существен). Аналитическая функция F работает с каждой **жордановой клеткой** отдельно:

$$F(D) = F_1(D_1) \oplus F_2(D_2) \cdots \oplus F_i(D_L) \quad (10.7)$$

(Из этого разложения легко сделать вывод о возможности по-клеточного / по-блочного сравнения функций от матриц, который будет использован ниже). От жордановой клетки вычислить логарифм достаточно просто, применив разложение в ряд **Ньютона-Меркатора** (ряд Тейлора

для функции натурального логарифма от матрицы):

$$\tilde{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.8)$$

и далее представить матрицу справа от знака равенства в виде суммы единичной матрицы $\mathbf{I}$ и матрицы $\mathbf{G}$, на диагоналях которой находятся нулевые значения: $\mathcal{D} = \lambda(\mathbf{I} + \mathbf{G})$. Применив хорошо известное разложение логарифма в ряд Тейлора для скалярной переменной и, с учётом возможности вычисления аналога ряда Тейлора, примененного в равной мере для коммутируемых матриц(ы) $\mathbf{G}$ имеем:

$$\ln(\mathbf{I} + \mathbf{G}) = \frac{\mathbf{G}}{1} - \frac{\mathbf{G}^2}{2!} + \frac{\mathbf{G}^3}{3!} - \frac{\mathbf{G}^4}{4!} \dots \quad (10.9)$$

Этот ряд обрывается на некоторой степени, поскольку жорданова клетка является **нильпотентной** и, будучи возведенная в степень k (размерность жордановой клетки), обращается в нулевую матрицу. В результате легко вычислить энтропию $S = \ln \Delta \Gamma$, путем усреднения по всем микроравновесным состояниям. Важно принимать во внимание условие нормировки - сумма по всем вероятностям состояний исследуемой системы, образует полную группу событий. Здесь вероятность выражена значением на диагонали статистической матрицы 2, однозначно связанного с энергией микросостояния, суммирование производится по всем возможным микросостояниям и на главной диагонали матрицы $\tilde{\mathcal{D}}$, расположены ненулевые значения. Длина этой диагонали составляет число смежных классов эквивалентности от статистического веса и вычисляется с помощью функции Эйлера: $\phi(\Gamma) = L = k + l + m$ — это число простых сомножителей в АВС-гипотезе см. формулу (4.1).

Начальное значение энтропии $S_0 = \frac{\ln \text{Rad}(abc)}{L}$ Логарифм от произведения разлагается в сумму логарифмов и равно усредненному значению от следа матрицы энтропии $\Rightarrow$ деление на число ненулевых значений на главной диагонали матрицы $\mathfrak{D}$ т.е. длина цепочки L в формуле (4.1). Пусть в момент времени t_1 включается вырождение энергетических уровней, что на языке алгебры матриц означает появление кратных собственных значений — корневых векторов (10.3). Это можно реализовать путем «включения» в характеристическом многочлене, степеней больших, чем единица:

$$\frac{1}{L} \prod_{i=1}^{i=L} \frac{e^{-\frac{E_i}{T}} * (\lambda - \lambda_i)^{1+\sigma(t-t_1)(k_i-1)}}{1 + \sigma(t - t_1)(k_i - 1)} \quad (10.10)$$

а далее остаётся привести соответствующую этому характеристическому многочлену матрицу к жордановой форме и взять от полученной матрицы логарифм. Поясним значение переменных:

- λ_i — все простые числа — сомножители из L -ряда чисел $\text{Rad}(abc)$, они же являются собственными значениями линейного отображения / матрицы
- k_i - это показатель степени из формулы (10.2), одновременно кратность корня и размер i -ой клетки Жордана линейного отображения
- σ — сигмоидальная функция активации или просто сигмоида $\sigma(t)$ она может быть приближена по формуле $\frac{1}{1+e^{-\nu(t-t_1)}}$, где параметр ν задается извне и регулирует плавность изменения, чем больше значение ν , тем круче «ступенька» в момент времени t_1 . Эта функция здесь определена на действительной оси $\mathbb{R}$
- E_i - энергия, в расчете микросостояние i . Этот сомножитель в степени экспоненты, деленный на температуру T определяет плотность распределения вероятности в зависимости от гамильтониана исследуемой системы.

Выше после формулы (10.5) был сделан вывод о возможности разложении линейного пространства в прямую сумму подпространств, что означает приведение матрицы к жордановой форме. Для каждой клетки - свой уникальный корень λ_i . Поскольку в пределах каждой жордановой

Поскольку в пределах каждой жордановой клетки сомножитель $e^{-\frac{E_i}{T}}$ остается одним и тем же, можно его рассматривать как константу и в рассуждениях ниже сократить. Формула энтропии (8.2) просто оперирует с вероятностными величинами.

клетки сомножитель $e^{-\frac{E_i}{T}}$ остается одним и тем же, можно его рассматривать как константу и в рассуждениях ниже сократить ("по-клеточное" / "поблочное" сравнение матричных функций). С позиции школьной физики можно заметить, что при изучении **идеальной машины Карно** расчет К.П.Д. производится на основе величины $\frac{\delta Q}{T}$, которая является дифференциалом энтропии. Следовательно, формула (10.10), с учётом определения энтропии (8.2) оперирует с вероятностными величинами, что в свою очередь является чисто математическим понятием, исключает такую непривычную для алгебры матриц величину как температура (последняя может быть определена для исследуемой системы из канонического определения Гиббса путем взятия частной производной энтропии по энергии).

Логарифм от статистического веса

Функция (10.10) дифференцируема и может быть аналитически продолжена на комплексную плоскость. Это значит, что с каждой жордановой клеткой она работает отдельно 10.7. Легко вычислить матричный логарифм.

Если только что упомянутую матрицу привести к жордановой форме, взять от каждого элемента на главной диагонали матрицы логарифм, и произвести усреднение по всем значениям, то получится значению энтропии исследуемой системы.

В самом деле, внимательный взгляд на (10.10) выявляет формулу (8.2) для нахождения энтропии. Усреднение по всем микросостояниям достигается путем деления на общее число микросостояний. Каждое микросостояние считается равновероятным. При вычислении среднего значение логарифма от матрицы знак произведения в формуле (10.10) заменится на суммирование. Немного громоздкий знаменатель дроби после знака произведения в этой формуле позволяет сделать сначала усреднение значения логарифма элемента на главной диагонали по каждой жордановой клетке отдельно с учетом кратности (степени) каждого сомножителя. По результатам такого по-клеточного усреднения сократиться показатель степени каждого простого числа из матрицы (см. рабочие методы и таблицы в [С Г05]), [Pox15]. Далее проводится

[С Г05]: С Г Григорьев (2005), Математика для студентов учреждений среднего проф
[Pox15]: Рохо (2015), Возможно да, возможно нет. Фишер. Статистический вывод

усреднение по всей диагонали матрицы, где уникальное значение каждого простого числа встречается лишь один раз, а всего таких чисел равно числу микросостояний. Происходит «размазывание» плотности вероятности от операции усреднения по всем возможным клеткам Жордана и с учетом кратности корневого вектора λ_k т. е. его высоты или показателя степени простого числа в формуле АВС-гипотезы.

$$S = -\langle \ln w(\lambda_i) \rangle = -\sum_i w_i \ln(w_i) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{i=L} \frac{1}{k} \ln(\lambda_i^k) e^{-\frac{E(\lambda_k)}{T}} \quad (10.11)$$

При адиабатическом сжатии/расширении объем фазового пространства системы и усредненный матричный логарифм от него — энтропия остаются постоянными. Со множитель $e^{-\frac{E_k}{T}}$ качественно не меняет главного вывода: сохранение энтропии в результате адиабатического изменения макросостояния системы. При этом след матрицы $\widetilde{\mathcal{D}}$ равен сумме следов объединённых матриц. Можно сопоставить начальное значение энтропии S_0 со значение в момент времени $t_1 + 0$ и далее выделить некоторые степени свободы исследуемой системы отдельно. Выше рассматривалась ситуация когда квазиклассическим является не всё движение системы, а лишь движение, соответствующее части степеней свободы, в то время как по остальным степеням свободы движение является квантовым. Поскольку энтропия сохраняется во время адиабатического процесса, можно вернуть подсистему в исходное состояние.

С позиции школьного курса

Громоздкую формулу (10.10) и формулу (10.11), основанную на знаниях статистической физики, можно заменить уравнением адиабаты из школьного курса (9.2), ограничиваясь общим описанием вырожденных энергетических уровней и соответственно появлением жордановых клеток, размером более единицы, что существенно упрощает понимание сути доказательства.

Исходя из раскрываемого в Приложении понятия статистической матрицы 2, можно сформулировать простое

матричное соотношение в виде следующих уравнений:

$$Tr(\tilde{D}) = Tr(\mathbf{A}) + Tr(\mathbf{B}) + Tr(\mathbf{C}) \quad (10.12)$$

очевидное из анализа главной диагонали матрицы $\tilde{D}$ блочно-диагонального вида $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}$.

А следующая формула означает усреднение статистических переменных с учетом весов слагаемых (длин диагоналей $L = k + l + m$ каждого блока матрицы $\tilde{D}$).

$$\frac{1}{L}Tr(\tilde{D}) = \frac{k}{L} \frac{Tr(\mathbf{A})}{k} + \frac{l}{L} \frac{Tr(\mathbf{B})}{l} + \frac{m}{L} \frac{Tr(\mathbf{C})}{m} \quad (10.13)$$

Из последнего вытекает соотношение между терминах следами матриц и величинами энтропии для исследуемых случайных A, B, C :

$$\begin{aligned} Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_{\tilde{D}} &= Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_A \\ &+ Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_B + Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_C \\ S_D &= S_A + S_B + S_C \end{aligned} \quad (10.14)$$

Что просто выражает свойства аддитивности энтропии, в частности, при разделении переменных. По условиям ABC-гипотезы $A + B = C$, Важно помнить, что по правилам сложения дисперсий случайных независимых величин дисперсия суммы равна сумме дисперсий, что дисперсия всегда положительна $\implies$

$$max(Var(S_A), Var(S_B), Var(S_C)) < Var(S_{\tilde{D}}) = Var S_0 \quad (10.15)$$

Благодаря этим соотношениям, принимая во внимание свойство аддитивности энтропии, подчинение нормальному закону флуктуации этой величины легко найти верхнее ограничение $q(a, b, c)$ (см. раздел 13). Но для этого необходимо рассмотреть основы статистической физики см. Приложение 3.

11 Произвольные A , B , C и квантовая механика

Школьная программа включает в себя основы комбинаторики и теории вероятностей, движение маятника, уравнения осциллятора, основы термодинамики, внутреннюю энергию, количество тепла, первый закон термодинамики, интерференцию волн, спектр сигналов [Хар62], резонансные явления, концепцию корпускулярно-волнового дуализма, фотоны, явление фотоэффекта, атомные орбитали и спин, принцип неопределенности Гейзенберга [Мес78], основы лабораторных измерений и их погрешности и так далее. - Этот обширный список понятий позволяет провести аналогию излагаемого материала со школьной программой.

[Хар62]: Харкевич (1962), Спектры и анализ

[Мес78]: Мессиа (1978), Квантовая механика. Том 1.

Можно сопоставить линейным отображениям $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ квантово-механическую систему. Перейдем от евклидова пространство к гильбертову. Гильбертово пространство, изученное в первом десятилетии 20-го века Дэвидом Гильбертом, Эрхардом Шмидтом и Фриджесом Рисом в рамках теорий дифференциальных уравнений в частных производных и квантовой механики, может быть объяснено школьникам с позиции основ радиофизики, уравнений, описывающий распространение электромагнитной волны, явление интерференции.

12 Аналогии из систем ЛДУ

Интересно сделать некоторые аналогии изложенного в Приложении 2 квантово-механического подхода с системами линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ). Пусть гамильтониан (напомним, что это аналог теоремы о кинетической энергии, изучаемой в школе, но в обобщенных координатах) H исследуемой системы явно не зависит от времени, тогда в гейзенберговском представлении для описания этого простого случая применяется уравнение:

$$i\hbar\dot{\psi} = \hat{H}\psi \quad (12.1)$$

[Зел02]: Зелевинский (2002), Лекции по квантовой физике

[Фер00]: Ферми (2000), «Лекции по квантовой механике.»

Унитарный оператор конечного сдвига во времени определяется по формуле [Зел02], [Фер00]:

$$\widehat{U}(t) = e^{i\widehat{H}t/\hbar} \quad (12.2)$$

Преобразование $\widehat{U}(t)$ переводит вектор $\psi(0)$ в $\psi(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \widehat{U}(t)\psi(t_0) \\ \psi(t_0) &= \widehat{U}^{-1}(t)\psi(t) \dots \psi(t_0) = \widehat{U}^+(t)\psi(t) \end{aligned} \quad (12.3)$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений, выраженную в матричной форме:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}(t)\mathbf{y} \quad (12.4)$$

где $\widetilde{\mathcal{D}}$ — блочно-диагональная матрица линейного отображения, в общем случае зависящая от времени t . По условиям АВС-гипотезы все собственные значения не равны нулю $\Rightarrow$ матрица невырожденная, а все её собственные значения различны $\det D = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$, начальный объем фазового пространства $\Gamma_0 = \frac{Rad(abc)}{L}$. На диагоналях блочно-диагональной матрицы $\widetilde{\mathcal{D}}$ расположены элементы, где k - размер жордановой ячейки, на диагоналях матрицы расположена аналитическая функция (10.10) с параметром, учитывающим адиабатические изменения в системе $\widetilde{\mathcal{D}}$.

[Мыш72]: Мышкис (1972), Высшая математика специальные курсы

Рассмотрим фундаментальную матрицу системы линейных дифференциальных уравнений Y и определитель Вронского $W = \det Y(t)$. Согласно теореме Лиувилля-Остроградского [Мыш72] [15, параграф VIII (18)]:

$$\begin{aligned} W(t) &= W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{Tr} D(\tau) d\tau \\ &\dots \prod_1^n \lambda_i = \exp \int_0^T \text{Tr} D(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (12.5)$$

В момент времени t_1 кратность корней увеличивается, что физически соответствует вырожденным энергетическим уровням системы, но след матрицы под интегралом остается постоянным. Близкая по смыслу формула найдена для определителя польского философа и математика Вронского, удобного для нахождения производной вектор-функции в системе линейных дифференциальных уравнений вида (12.4)).

Приведенные математические формулы раскрывают физический смысл фазового пространства и следа матрицы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Адиабатический процесс и постоянство энтропии играют важную роль. С этой позиции формулы для нахождения объема фазового пространства и энтропии системы имеют аналоги в теории систем линейных дифференциальных уравнений, кратко выраженной в матричной форме.

Продолжаем ряд примеров. Рассмотрим фундаментальную матрицу (т.е. состоящую из линейно независимых векторов решений (12.4 системы для которой действует простое соотношение:

$$Y(t, 0) = I$$

$$Y(t_1, t_2) = Y(t_2, t_1)^{-1} \quad (12.6)$$

Флоке в известной теореме доказал, что для периодических систем с периодом T (в смысле времени, а не температуры):

$$Y(t, 0) = \Phi(t) \exp(tM) \quad (12.7)$$

Собственные значения именуют мультипликаторами T -периодической системы. Исходя из сказанного выше, в нашем случае все эти мультипликаторы по модулю не больше единицы см. вторую часть формулы 12.5). Последние две формулы соответствуют унитарному оператору конечного сдвига во времени (12.3). где $\Phi(t)$ периодическая функция с периодом T .

Имеются и другие аналогии фазового пространства $W \rightarrow \Gamma$ и энтропии $Tr(D(\tau)) \rightarrow S$. Обратите внимание, что матрицы бесконечны и приведены к форме Жордана, рассматриваемая сигмоидальная функция активации вклю-

чает/выключает кратность корней и обеспечивает преобразование только что упомянутой матрицы.

Возникает вопрос, почему бы не записать приведенные выше уравнения с позиции аналитической механики при исследовании фазового пространства и энтропии либо их аналогов? В действительности, для реального физического объекта практически невозможно строго выдержать условия адиабатической изоляции. Сколь угодно малое нарушение этого условия означает возникновение малых случайных воздействий, по отношению к которым механические траектории неустойчивы как в обычном, так и в фазовом пространстве. Следствием неустойчивости в физической системе будет динамический хаос, что приводит к явлениям перемешивания и забывания начальных условий и фактически означает переход к статистическому описанию. Сложные вопросы эргодической гипотезы, выходят далеко за рамках поставленного исследования.

13 Флуктуации

Для $\forall$ формулы (4.1) существует целый класс физических подсистем: идеальные газы, растворы, колебания кристаллической решетки с квазичастицами — фононами, и так далее, где реализуются изложенные выше подходы, и АВС-гипотеза тривиально доказывается с позиции взгляда наблюдателя из микромира.

Чему соответствует показатель качества тройки q или отклонения от изложенных принципов? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к полной системе, включающей исследуемую подсистему и флуктуации.

С учетом рассуждений выше и формулы следует найти подходящую интерпретацию показателю качества тройки $q(a, b, c,)$, задаваемой через непрерывную дифференцируемую функцию $\check{q}$ верхняя граница которой 9.3 асимптотически приближается к термодинамическим оценкам произведенным в этой главе, и тем точнее, чем больше значение энтропии 9.1.

(В термодинамике оперируют числом молекул, порядка числу/постоянной Авогадро - числа частиц, содержащихся в одном моле любого вещества $6.022 \cdot 10^{23}$). Большинство известных примеров отыскания троек чисел с

использованием суперкомпьютеров и распределенных вычислительных сетей т. н. «хороших троек» [ABC] с $q > 1$ превышающих единицу ($q(a, b, c) \sim 1.4$), но эти больше спортивные, чем научные рекорды составляют порядка одной десяти тысячной от постоянной Авогадро.

Полагая верхнюю границу при больших N , целесообразнее заменить слово «качество» для $q(a, b, c)$ соответственно определенной нами функции $\check{q}$ на общепринятое в теории ошибок «дефект» по формуле флуктуации от среднего значения исследуемой системы, объединяющей подсистемы A, B, C .

Согласно 10.15 показатель дефекта исследуемой системы q_{ABC} , будет заведомо больше $\check{q} < q_{ABC} = \frac{\Delta S}{S}$ и последняя ограничивающая сверху функция будет иметь нормальное распределение в силу закона больших чисел, а также свойств аддитивности энтропии.

Центральная предельная теорема

Известно, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике. Чем это объясняется? Ответ на этот вопрос был дан выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым (центральная предельная теорема) : если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному. [Гму23]

Для изолированной подсистемы не уместна сама постановка о флуктуации энергии, энтропии, температуры, числа частиц и других термодинамических параметров - говорить о флуктуации можно лишь рассматривая систему в целом. Пусть определена равновесная энтропия тела $S(E, V)$, как функция его (средних) энергии и объема. Будем понимать под флуктуацией энтропии изменение функции $S(E, V)$, рассматриваемой формально, как функция от точных (флуктуирующих) значений энергии и объема. Известно, что вероятность флуктуации в системе пропорциональна экспоненте с отклонением энтропии:

$$w = e^{\Delta S} \quad (13.1)$$

[ABC]: ABCHome (), Волонтерская сеть под названием ABCHome посвящен распределенному вычислительному проекту, который должен был составить полный список всех троек ABC, состоящих из целых чисел, состоящих максимум из 18 цифр.

[Гму23]: Гмурман (2023), Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В



[А.М. Ляпунов] Александр Михайлович Ляпунов (1957-1918) — русский математик и механик. Основоположник теории устойчивости равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Также работал в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей.

[Лан02]: Ландау (2002), Теоретическая Физика В 10т. Том 5. Статистическая Физика.

[С Г05]: С Г Григорьев (2005), Математика для студентов учреждений среднего проф

[Худ70]: Худсон (1970), Статистика для физиков

[Гму23]: Гмурман (2023), Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В

здесь имеется ввиду энтропия системы в целом см. 10.12 - 10.14.

Для начала найдем средний квадрат флуктуации числа частиц обычного идеального газа, находящихся в некотором выделенном в газе относительно малом объеме. Исходя из равномерного распределения молекул газа по всему объему V_0 и условий о малости исследуемой подсистемы в сравнении со всей системой $\frac{V}{V_0} \ll 1$ квадрат флуктуации числа частиц в подсистеме (точек в многообразии фазового пространства 1^n) определяется по формулам [Лан02] формула 113.1:

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = N; \dots \frac{(\langle (\Delta N)^2 \rangle)^{1/2}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (13.2)$$

Относительная флуктуация числа частиц равна обратному квадратному корню из среднего числа частиц. - Сравните с формулами теории вероятностей и математической статистики [С Г05], [Худ70]. Исходя из среднего квадрата части в заданном объеме газа находится гауссово распределение вероятности флуктуации числа частиц:

$$w(N)dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{N}}} \exp\left(-\frac{(N - \bar{N})^2}{2\bar{N}}\right) dN \quad (13.3)$$

Для малых значений N удобно применять формулу Пуассона, известную из математической статистики.

$$w_n = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!} \quad (13.4)$$

В интересующем нас случае (выделенный объем) $V \ll V_0$ (исходный объем) число частиц в выделенном объеме хотя и может значительно отличаться от своего среднего значения, но предполагается малым по сравнению с полным числом частиц в газе. С учетом формулы Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ формула (13.3) переходит в формулу (13.4) при малых отклонениях.

Касаясь вопроса о флуктуации энтропии, заметим следующее. Согласно теореме Чебышёва [Гму23], глава 9.3) при наличии достаточно большого числа независимых

случайных величин с ограниченными дисперсиями событие можно считать практически надежным, что означает, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет сколь угодно малым по абсолютной величине условия.

В силу теоремы Чебышёва, центральной предельной теоремы Ляпунова и свойства аддитивности энтропии можно применить Гауссово распределение вероятности (13.2-13.4) для флуктуации энтропии $\Delta S = \frac{1}{\sqrt{S_0}}$ и максимального значения функции q_{ABC} обозначаемого как $\Delta q_{ABC_{max}}$. В самом деле, количество частиц в газе, равно как и энтропия являются аддитивными величинами и [интегралами движения](#), поэтому они должны описываться аналогичными формулами.

Достаточно мысленно поставить эксперимент по разделению исходного сосуда на N малых эквивалентных сосудов, при этом N — это достаточно большое число, но заведомо намного меньшее, чем число Авогадро и число молекул в системе. Тогда вместо среднего числа частиц в формулах для оценки флуктуации выше можно подставить значение энтропии.

Вопрос о плотности распределения простых чисел остаётся в науке открытым [[Пра](#)]. Вместе с тем, можно ввести случайную функцию q_{ABC} , подчиняющуюся закону нормального распределения, которая ограничит непрерывную и дифференцируемую $\check{q}(a, b, c)$ сверху для достаточно больших значений $\frac{Rad(abc)}{L}$. Произведём оценки среднеквадратичного отклонения q_{ABC} для системы, в целом, объединяющей подсистемы:

$$\sigma_{q_{ABC}} = \frac{(\langle(\Delta S)^2\rangle)^{1/2}}{S} = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \approx \sqrt{\frac{L}{(\ln(Rad(abc)))}} \quad (13.5)$$

Выше было сказано 9.4, что $\exists$ градиент непрерывной и дифференцируемой функции $grad(\check{q})$ на всей области определения $\check{q} : M \rightarrow R$. Этот градиент не обращается в бесконечность и приращение $\Delta \check{q}$ может быть ограничено сверху нормально распределённой случайной функцией q_{ABC} .

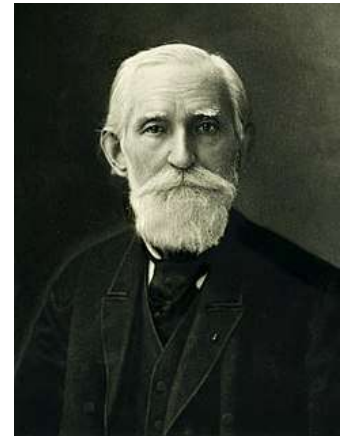


Рис. 13.5: Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894) — русский математик и механик, основоположник петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук и ещё 24 академий мира. Чебышёв получил фундаментальные результаты в теории чисел

[[Пра](#)]: Прахар (), Распределение простых чисел

Для оценки верхней границы максимального отклонения $\Delta q_{ABC_{max}}$, можно принять во внимание дискретный характер фазового пространства и принцип равной вероятности микросостояний, а также условие нормировки (6.5).

Definition 13.1 Максимальному отклонению $\Delta q_{ABC_{max}}$, соответствует наименьшему значению вероятности ω нахождения объекта в исследуемом микросостоянии.

В свою очередь, вероятность такого микросостояния определяется лишь значениями на главной диагонали статистической матрицы. Всего таких элементов L , в результате имеем: $w_{min} = \frac{1}{L} \approx \frac{1}{L}$. Из нормального распределения Гаусса имеем:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta q_{ABC}^2}{2\sigma^2}\right) \quad (13.6)$$

Разрешая уравнение (13.6) и предполагая, что выражение под знаком корня положительное, находим:

$$\Delta q_{ABC_{max}} = \sigma \sqrt{2 \ln \frac{L}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \quad (13.7)$$

Результат алгебраических преобразований, в конечном счёте, выходит громоздким, но можно произвести оценку, достаточную для доказательства ABC-гипотезы. Несколькими абзацами ниже будет выполнен численный эксперимент - интегратор по методу Монте-Карло и приведена гистограмма нормального распределения.

Максимальное отклонение случайной функции $q_{ABC} = q_{ABC_{max}}$ соответствует наименьшей вероятности. Заметим, что $L \leq \pi(Rad(abc))$ функции Римана π . Это утверждение просто констатирует, что длина цепочки из различных простых чисел в формуле (4.1) не превосходит общего числа простых чисел, не превосходящих $Rad(abc)$, определяемого функцией Римана [Дер10] от радикала произведения A, B, C .

[Дер10]: Дербишир (2010), Простая одержимость : Бернхард Рيمان и величайшая нерешенная проблема в математике / Д. Дербишир ; Джон Дербишир ; пер

Оценка $\pi(x)$

Поясним, что функция Римана $\pi(x)$ определяется как

число простых чисел, не превышающее целое число x . Чебышёв в 1851 - 1852 годах доказал, что если существует предел, то он должен быть равен единице:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1 \quad (13.8)$$

Из чего следует вывод:

$$\sigma_{q_{ABC}} = \sqrt{\frac{L}{\ln(Rad(abc))}} < \frac{1}{\sqrt{Rad(abc)}} \quad (13.9)$$

Это соотношение тем строже, чем больше значение $Rad(abc)$.

В общем случае для нормального распределения плотность распределения вероятности определяется формулой [Гму23]:

[Гму23]: Гмурман (2023), Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В

$$|\Delta q_{ABC_{max}} < \epsilon| \leq 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \dots \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (13.10)$$

Исходя из длины цепочки формулы 4.1 равной L , и значения $\Delta q_{ABC_{max}}$, отыщем соотношение между минимальным значением длины цепочки в 4.1 и $Rad(abc)$, при котором сказывается фактор дискретности фазового пространства:

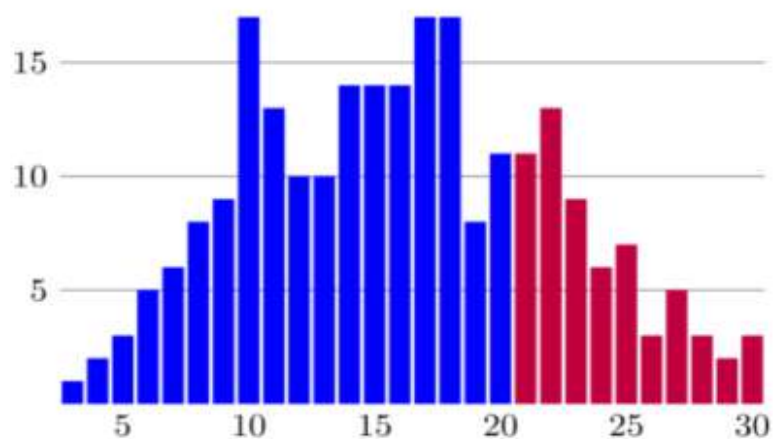
$$\begin{aligned} \frac{1}{L} &= \frac{\sqrt{Rad(abc)}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta q_{ABC}^2}{2\sigma^2}\right) \Rightarrow \\ L\sqrt{Rad(abc)} &= \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\Delta q_{ABC}^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (13.11)$$

Формула во второй строке определяет условия, при которых сказывается фактор дискретности фазового пространства 13.6. Справа стоит быстро возрастающая функция, которая легко превысит значение произведения $\forall$ сомножителей слева $L\sqrt{Rad(abc)}$, что с учётом оценки среднеквадратичного отклонения 13.9 означает исчезновение искомым троек по мере нарастания определённой выше энтропии 9.1. Важно помнить, что из формулы 9.1 и 13.9 следует экспоненциальный рост $rad(abc)$ по

отношению к длине цепочки простых чисел L в формуле 4.1.

Из сказанного легко доказать, что для $\forall$ наперёд заданного ϵ существует только конечное число троек чисел, для которых $q(a, b, c) = \check{q} < q_{ABC_{max}} - \epsilon$ (не следует путать произвольный задаваемый параметр ϵ с энергией одной молекулы, обозначаемой выше той же буквой!) $\nexists q(a, b, c) = \check{q} > q_{ABC_{max}}$.

Рис. 13.6: Эта гистограмма иллюстрирует дискретную природу фазового пространства для исследуемой тройки чисел ABC. В случае $q(a, b, c) > q_{ABC_{max}}$ не существует ни одной тройки, удовлетворяющей ABC гипотезе.



Можно сравнить с ABC@home проектом эти несложные оценки. Ниже приведена гистограмма качества троек q от числа десятичных разрядов в числах ABC.

В Проекте ABC@home говорится: [Список т. н. хороших троек, состоящий из 20 цифр, уже завершен](#). Например, на графике показано, что существует 11 хороших троек, в которых содержится 20 цифр. Когда будут обнаружены новые хорошие тройки, увеличится только красная часть на графике выше. (уже 20 десятичных разрядов).

Волонтерская сеть ABC@home

Волонтерская сеть под названием ABC@home посвящена распределенному вычислительному проекту поиска т.н. "хороших" троек (unbitten triples). В 2011 году проект ABC@home достиг цели составить полный список всех троек ABC, состоящих из целых чисел, состоящих максимум из 18 цифр. Список насчитывает 14,482,065 троек. См. 241 ABC-тройка «качества» q не ниже 1,4, которые часто называют «хорошими» ABC-тройками. <https://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/abc/index.php> по сост. на 11.05.2024

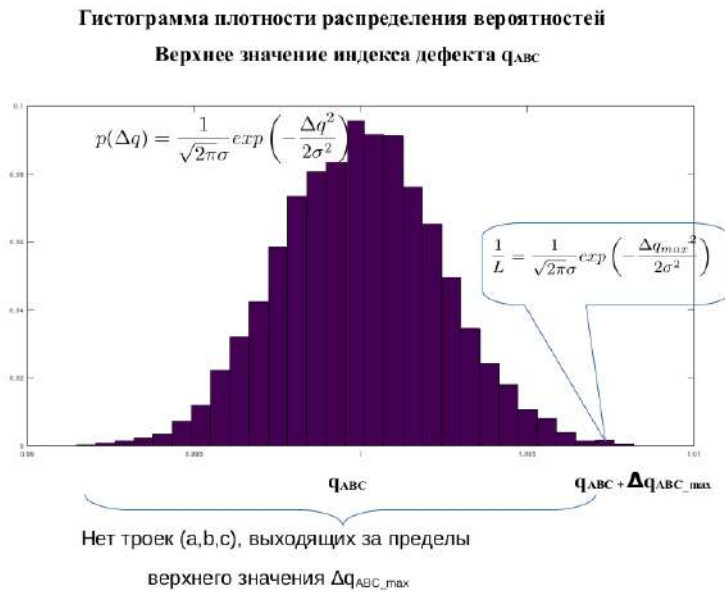


Рис. 13.7: Проект ABC@home находит все тройки ABC чисел для заданной верхней границы «качества» $q(a,b,c)$ и числа десятичных разрядов.

В действительности в Проекте [ABC] применена логарифмическая шкала к нормальному распределению $q_{ABC_{max}} = 1 + \Delta q_{ABC_{max}}$ и далее количественный метод группировки набора ранжированных данных на равные подгруппы, в данном случае - *децилии*), но характерный вид нормального распределения (см. выше распределение Максвелла (8.6) и Рис. 1 13.6 от этого не изменился.

[ABC]: ABChome (), Волонтерская сеть под названием ABC-home посвящен распределенному вычислительному проекту, который должен был составить полный список всех троек ABC, состоящих из целых чисел, состоящих максимум из 18 цифр.

Интегратор по методу Монте-Карло и гистограмма нормального распределения

```
##### historgam.m #####
# Здесь 100000 - это размер случайной
# выборки. Данный параметр передается
# в функ. mcintgrv (Monte-Carlo Integral Vector)

for i=1:10000
s(i) = 0.5 * mcintgrv("sin", 0, pi, 100000);
endfor
# Строится гистограмма, 30 интервалов.

hist(s, 30, 1)

## Конец файла historgam.m

##### mcintgrv.m #####
```

```

#
# функция I = mcintgrv(fun, a, b, mclloops)
#
function I = mcintgrv(fun, a, b, mclloops)

# В эту функцию может быть передана
# любая иная функция по ссылке
# Главное, чтобы она были непрерывная
# принимала положительные значения
# на интервале [a,b]

# Находим максимальное значение
x = linspace(a,b);
f = feval(fun,x);
maxf = max(f);

# Генерируем случайные массивы "капель дождя"
r1 = rand(mclloops,1);
r2 = rand(mclloops,1);

# Получаем массив случайных значений x и y
# для капель дождя (x,y), падающих
# на прямоугольник [a,b] x maxf
l = b - a;
x = a + l.*r1;
y = maxf.*r2;
fx = feval(fun, x);

# Подсчитываем количество точек, лежащих
# под графиком, счётчик fx = feval(fun, x)
# Находим интеграл
I = counter/mclloops*maxf*l;
endfunction

#### Конец файла mcintgrv.m

```

[Han11]: Hansen (2011), GNU Octave Beginner's Guide

Выше приведён код [Han11] векторизованной функции mcintgrv (Monte-Carlo Integral Vector), которая вызывается с аргументами.

Данный код создан на GnuOctave (аналог MathCad) по лицензии GNU GPL. Он состоит из двух файлов historgam.m и mcintgrv.m. Первый код позволяет построить гистограмму распределения плотности вероятности для случайно

генерируемой выборки из набора данных объемом 100000 значений интеграла.

В файле `mcintgrv` происходит вычисление интеграла методом Монте-Карло. Он работает для произвольной функции, положительной на заданном интервале значений и заключается в подсчёте доли равномерно падающих "капель дождя" (или распылённой с помощью пульверизатора краски), осевших под кривой, в сравнении с общим количеством капель (краски), приходящихся на прямоугольник, построенный на интервале значений функции по оси абсцисс и от нуля до максимума функции по оси ординат $[a, b] \times \max f$. Исходя из равномерного распределения случайных точек (x, y) , найденная таким способом доля будет равна соотношению площади под кривой — искомого интеграла к элементарно подсчитываемой площади прямоугольника. Метод Монте-Карло особенно эффективен для численного интегрирования в n -мерном пространстве.

Код прост для понимания. Особое внимание следует уделить выполнению сравнения между значением функции и значению ординаты y случайной точки. Результатом этой операции сравнения является логический массив, который возвращает индексы всех истинных элементов в массиве. Извлекая количество индексов просто подсчитать количество случайно генерируемых пар значений (x, y) , которые расположены под графиком функции.

Осторожно ступенька!

Гистограмма, полученная путем моделирования иллюстрирует фактор дискретности фазового пространства: вместо плавного убывания хвостов гистограммы слева и справа имеем ступенчатый обрыв: по мере увеличения масштаба шкалы по вертикали частоты становятся целыми числами.

Попробуйте запустить этот код в GnuOctave или его аналогах, измените размер выборки со 100000 до 10000, 1000, 100, варьируйте количество интервалов в гистограмме. Эти численные эксперименты позволят непосредственно проверить, как зависит среднеквадративное отклонение σ случайной величины относительно её математического ожидания от размера выборки.

На ноутбуке автора векторизованная версия интегратора Monte Carlo выполняет примерно в 300 раз быстрее, чем "обычный" метод численного интегрирования. Используя векторизованное программирование, можно также избежать множества циклов, которые выполняют тривиальные задачи и загромождают код. Векторизованный

код намного легче воспринимать и осуществить его отладку.

Итак, количество частиц в газе, равно как и энтропия являются аддитивными величинами, формула (13.7, 13.10) также подходит для оценки флуктуаций энтропии. Для этого достаточно мысленно поставить эксперимент по разделению исходного сосуда на N эквивалентных сосудов (в случае смеси газов эта операция должна быть произведена без разделения молекул разных газов, что привело бы к изменению энтропии), при этом N — это достаточно большое число, вместе с тем много меньшее, чем число Авогадро / число молекул в системе. Вместо среднего числа частиц необходимо подставить значение энтропии.

Легко показать, что этот вывод эквивалентен другому представлению о дефекте $q(a, b, c) < K(\epsilon) \text{rad}(A, B, C)^{1+\epsilon}$ где $K(\epsilon)$ - определенная константа, зависящая только от ϵ .

Вместо использования суперкомпьютеров и распределенных вычислительных ресурсов легко создать выборку нормального распределения объёмом сотня-сто тысяч единиц и за полсекунды - тридцать секунд получить более содержательный результат с помощью кросс-платформенного приложения GnuOctave (аналог MathLab по лицензии GnuGPL) даже далеко не на новом настольном компьютере. - Налицо сбережение интеллектуальных и энергетических ресурсов.

14 Функции Чебышёва и энтропия

Арифметические функции Чебышёва определяются следующими выражениями. Для случая $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log(x), p > 0 \quad (14.1)$$

Из чего следует, что $e^{\theta(x)} = \text{Rad}(x)$ т.е. произведение всех простых чисел, образующих x , взятых в первой степени.

Функция Чебышёва $\psi(x)$ определяется несколько иным выражением:

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log(x), p > 0 \quad (14.2)$$

$\implies e^{\psi(x)}$ - это наименьшее общее кратное всех положительных $p \leq x$.

Из двух определенных функций Чебышёва [Чан74] следует их взаимосвязь по следующей формуле:

[Чан74]: Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \theta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots \quad (14.3)$$

Этот ряд конечен, поскольку $\theta(x) = 0$ при $x < 2$. Если $p^m < x < p^{m+1}$, то $\log(p)$ встречается в 14.2 ровно m раз $m = \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor$, а следовательно:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor \log(p) \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log(x)}{\log(p)} \log(p) \\ &= \log(x) \sum_{p \leq x} 1 = \log(x) \pi(x) \end{aligned} \quad (14.4)$$

Представим себе главную диагональ статистической матрицы, состоящую из всех простых чисел не более x , каждое из которых записано лишь один раз. Риман ввёл специально функцию $\pi(x)$ для обозначения числа простых чисел не превосходящих x . Хотя порядок следования не играет роли с позиции статической матрицы, не меняя общности будем считать их расположенными по возрастанию.

Из определения энтропии 8.2 через усреднение значений логарифма значений по следу статистической матрицы следует, что физический смысл функций Чебышёва находится во взаимосвязи с энтропией исследуемой системы в состояниях

- для $\theta(x)$ без кратного вырождения энергетических уровней $S_0 = \frac{\theta(a)}{\phi(a)}$
- для $\psi(x)$ с кратным вырождением энергетических уровней $S = \frac{\psi(a)}{\phi(a)}$ -

В обоих случаях в знаменателе стоит функция Эйлера. При адиабатических изменениях по теореме Лиувилля

фазовый объем сохраняется и $S_0 = S$. Кроме того, очевидно, $\phi(n) < n$, для случая $n = p^m, m > 1$ (p - простое и $\frac{1}{p} > \epsilon$), $\phi(n) = n(1 - \epsilon) \implies$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n)}{n} = 1. \quad (14.5)$$

[Чан74]: Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

В работе [Чан74] приведена более точная оценка $\phi(n)$ с помощью сумматорной функции.

[Лан02]: Ландау (2002), Теоретическая Физика В 10т. Том 5. Статистическая Физика.

Из термодинамики известно, что значение числа частиц N , энтропии S , энергии и других аддитивных термодинамических переменных исследуемой системы в составе надсистемы (внешней среды) подвержены флуктуациям [Лан02]. Для одной молекулы идеального газа (можно рассматривать её в качестве отдельного класса смежности) значение дисперсии равно единице $D[N] = 1$. Всего таких частиц $\pi(a)$. Формулы 14.4 и 14.6 согласуются между собой, если считать $k = 1$. По правилам сложения дисперсий независимых случайных величин (см. сказанное выше о случайных термодинамических величинах) и выражаются по формулам:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta N)^2 \rangle &= N \\ \frac{(\langle (\Delta N)^2 \rangle)^{1/2}}{N} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \langle (\Delta S)^2 \rangle &= kS \\ \frac{(\langle (\Delta S)^2 \rangle)^{1/2}}{S} &= \frac{k}{\sqrt{S}} \end{aligned} \quad (14.6)$$

Здесь приведены флуктуации абсолютные и относительные. Благодаря свойству аддитивности, флуктуации абсолютные и относительные выражаются через само значение переменной с некоторым коэффициентом k . Например, $\langle (\Delta S)^2 \rangle = kS$ выражает то обстоятельство, что энтропия аддитивная переменная, и что при адиабатическом процессе её флуктуация прямо пропорциональна количеству частиц в исследуемой системе.

Из оценки сверху, сделанной на основе энтропии возбужденного состояния имеем:

$$\begin{aligned}
S_0 = \frac{\log(a)}{\phi(a)} = \frac{\theta(a)}{\phi(a)} \leq S = \frac{\psi(a)}{\phi(a)} &\longrightarrow \frac{\psi(a)}{a} = \frac{\log(a)\pi(a)}{a} \\
&S \longrightarrow S_0 \\
\pi(a) &\longrightarrow \frac{a}{\log(a)} \\
&(14.7)
\end{aligned}$$

Если положить коэффициент $k = 1$ для флуктуации энтропии, учесть 14.5, применить теорему Лиувилля ($\Delta\Gamma = \text{const} \implies S = S_0$), и положить, что $\pi(a) \longrightarrow \frac{a}{\log(a)}$, то обе дроби $\frac{\theta(a)}{\phi(a)} \longrightarrow \frac{\theta(a)}{a} \longrightarrow 1$ и $\frac{\psi(a)}{\phi(a)} \longrightarrow \frac{\psi(a)}{a} \longrightarrow 1$. Заметим, что функция Эйлера в обоих последних выражениях пробегает ряд из всех простых чисел.

Ряд Гранди и квантовая неопределённость

Как математический парадокс привёл монаха Луиджи Гранди к философским и теологическим выводам, перевернувшим представление о бесконечности?

Вопрос о том, каков результат бесконечного математического ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, на первый взгляд может показаться простой задачей, но в XVIII веке он стал настоящим вызовом для многих выдающихся математиков. Этот парадокс, известный как ряд Гранди, получил свое название в честь итальянского математика и монаха Луиджи Гвидо Гранди, который впервые начал его изучать в 1703 году.

Суть парадокса заключается в том, что, несмотря на кажущуюся простоту вычислений, различные методы подсчета приводят к разным результатам. Если представить ряд в виде $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$, то каждая пара чисел $1 - 1$ равна нулю, и вся сумма ряда сводится к нулю. Однако, если расставить скобки иначе, например, оставить первый элемент вне скобок, а затем сгруппировать остальные: $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$, то сумма уже оказывается равной 1. Таким образом, простое изменение порядка выполнения операций приводит к совершенно различным итогам.

Этот парадокс интересовал не только Гранди, но и таких выдающихся математиков, как Готфрид Вильгельм Лейбниц и Леонард Эйлер. Лейбниц, размышляя

над этой проблемой, предложил, что правильным ответом может быть $\frac{1}{2}$. Он обосновывал это тем, что если остановить сложение в случайной точке, промежуточная сумма будет либо 0, либо 1 с равной вероятностью. Поэтому, по его мнению, среднее значение суммы должно быть $\frac{1}{2}$. Леонард Эйлер в своем труде «О расходящихся рядах», опубликованном в 1760 году, поддержал эту идею и даже утверждал, что сумма ряда Гранди и дробь $\frac{1}{2}$ эквивалентны и могут быть заменены друг на друга без ошибки.

Однако, несмотря на все аргументы в пользу различных результатов, современные математики пришли к выводу, что ряд Гранди не имеет определенной суммы. Этот вывод основан на анализе частичных сумм ряда, которые чередуются между 0 и 1 и никогда не сходятся к какому-либо фиксированному значению. В математике такое поведение ряда означает, что он расходится, то есть не имеет конкретной суммы.

Современные подходы к бесконечным рядам и их суммированию появились благодаря развитию анализа в XIX веке. Было введено понятие сходимости, которое позволяет определить, к какому значению приближается сумма ряда по мере добавления всё большего числа его элементов.

Тем не менее, в случае ряда Гранди частичные суммы колеблются между 0 и 1 и не приближаются к какому-либо одному значению. Это ведёт к заключению, что ряд Гранди не имеет определенной суммы. Однако, существуют альтернативные методы суммирования, такие как метод Чезаро, при котором вычисляется среднее значение частичных сумм. Применение этого метода к ряду Гранди приводит к результату $\frac{1}{2}$.

Фрагмент из публикации: "Математик-монах находит божественное в парадоксальном ряде чисел" 21:49 / 16 августа, 2024 Источник Securitylab.ru

Читателей, знакомых с парадоксом "Кот Шрёдингера" такая квантовая неопределённость не удивляет. Это ещё один пример связи арифметики (в данном случае можно говорить о способах обособления чисел за счёт ассоциативных правил) с квантовой механикой.

Fermat's Last Theorem on the school Globe

Fermat's Last Theorem on the school Globe

6

1 Introduction

For nearly four centuries, the mathematical community has been engaged in the pursuit of a solution to Fermat's Last Theorem. A proof of more than a hundred pages has been developed by experts in number theory, but it is not feasible to provide a comprehensive summary here. Let us attempt to examine Fermat's theorem from the vantage point of physics and geometry. From these vantage points, Pierre de Fermat was able to identify a solution, the core tenets of which could be schematically represented in a relatively expansive margin of the book, as illustrated in multiple diagrams. However, the paradigms that have prevailed in mathematics for centuries have proved to be a significant impediment in finding a solution that is effective in the modern context. Those with a sceptical outlook continue to believe that Pierre de Fermat was most likely mistaken. However, the consistent application of the basic principles of physics, geometry and thought experiment encourages a different way of thinking. The story of the discovery of Fermat's theorem should be included in school and university training programmes. Indeed, the essence of the proof can be expressed in a single formula and a single drawing.

2 Discussed questions

Why are a ball and a cube homeomorphic? And what is [homeomorphism](#)? What role do isotropy, symmetry, homogeneity of space play in the search for mathematical proof? Why is there a fatal conflict between form and content in Fermat's Last Theorem? After discussing these questions, we will make generalisations and conclusions about the fundamental properties of our universe. Fermat's Last Theorem (FLT) was formulated by Pierre de Fermat in 1637, it states that the Diophantine equation is true:

$$a^n + b^n = c^n \quad (2.1)$$

1	Introduction	167
2	Discussed questions	167
3	Human mind vs Artificial Intelligence?	169
4	Mental experiments	169
5	Objections	171
6	Symmetry. Isotropy and homogeneity of space.	171
7	Why do Pythagorean triples only $\exists$ on the 2D?	174
8	Continuity. Homeomorphism. Equivalence classes .	178
9	An understanding of Set Theory.	178
10	Cardinality of Set and Equivalence function	179
11	Metric topology . . .	180
12	Pairwise disjoint equivalence classes .	181
13	Chain of n-cubes . .	182
14	Euclid's Axioms in XXI	186
15	A paradox	188
16	Journey to the vertex of the n-cube	189
17	Proof in a single formula and drawing	192
18	The Leonard Euler hypothesis	193
19	Summing up	199

[Wil95]: Wiles (1995), «Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem»

[BG94]: Boston и др. (1994), «The World's Most Famous Math Problem (The Proof of Fermat's Last Theorem and Other Mathematical Mysteries)» By Marilyn vos Savant»

[Gil00]: Gilbert (1900), «Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900»

[Avd22]: Avdyev (2022), «The Diophantine Equation From the Eye Of Physicist»

has no solutions in whole numbers $\mathbb{Z}$, except for zero values, for $n > 2$. The case degree of two is known in the school course under the name Theorem Pythagoras. Euler in 1770 proved FLT for $n=3$, Dirichlet and Legendre in 1825 - for $n = 5$, Lamé - for $n = 7$. In 1994 Prof. Princeton University Andrew Wiles [Wil95], [BG94] proved, for all n , but this proof, contains over one hundred and forty pages, understandable only to high qualified specialists in the field of number theory.

The field of Diophantine equations encompasses both Fermat's Last Theorem and Pythagoras' theorem. At the II International Congress of Mathematicians in Paris in 1900, the German mathematician David Hilbert presented a list of 23 mathematical problems [Gil00], including the Tenth Problem, which can be expressed in a few words as follows: **Let us define a Diophantine equation with arbitrary unknowns and integer rational numerical coefficients. We must then specify a method by which, after a finite number of operations, it is possible to determine whether this equation is solvable in integers or rational numbers.**

170 years later, the Soviet mathematician Yuri Vladimirovich Matiyasevich proved that there is no general algorithm see also a popular publication in the magazine "Quantum for some cases, can understand whether the Diophantine equation is solvable without resorting to calculations, relying on the methods of geometric algebra, symmetry, analogy and fundamental properties of multidimensional space, see [Avd22].

FLT is formulated by Pierre de Fermat in the margins of the book Arithmetic of Diophantus of Alexandria (III NE). Pierre de Fermat wrote in the narrow margins of the book that he had found a truly wonderful proof, but the narrow margins did not allow him to present the proof in full. Subsequently, descendants slandered the French mathematician, and considered that he made a light judgment, in other words, bragged and lied. The basis for this statement was the canonized proof of Andrew Wiles, for more than a hundred pages, for which he was awarded the prestigious **Abel Prize** in 2016. Subsequently, Andrew Wiles became dean of the Mathematics department at Princeton University, part of the Ivy League. But the scientific search cannot be stopped even after the most prestigious awards have been handed out, and the disharmony between the short wording and the complex proof of FLT only encourages audacious research. - Why not prove it easier? Truth is a process, not a finale.

3 Human mind vs Artificial Intelligence?

Are there short and simple ways to prove the Fermat's Last Theorem? To understand this is it necessary to waste one hundred or more pages and help of Artificial Intelligence? We refer to five hundred page work of Shinichi Mochizuki Japanese mathematician working in number theory and arithmetic geometry from Kyoto University, dealing with the [ABC conjecture](#) in Number theory [Har17]. But there is another approach. Minhyong Kim, a mathematician at the University of Oxford said: [It should be possible to use ideas from physicists to solve problems in number theory, but we haven't thought carefully enough about how to set up such a framework](#) And one more his quotation: [We are at a point where our understanding of physics is mature enough, and there are enough number theorists interested in it, to make a push](#)).

[Har17]: Hartnett (2017),
«Mathematicians Explore
Mirror Link between Two
Geometric Worlds»

The answer to the question whether there is a quick and easy way to prove Fermat's Last Theorem is yes! And this method involves a series of mental experiments. Consider a construction of three concentric nested n -cubes or balls, with centres at the origin, with edges or radii just equal to natural numbers a, b, c . It should be noted without change generality that the natural numbers in formula (2.1) are related as $a < b < c$, and the situation of equality of edges $a = b$ is excluded due to the irrationality of $\sqrt[n]{2}$. The case of negative numbers can be considered by moving term into another part of the equation and substitution of variables - it is enough prove the theorem for the case of $a, b, c \in \mathbb{N}_1$ and generalize the result to whole numbers $\mathbb{Z}$.

4 Mental experiments

Mental experiments are hypothetical situations used to explain a situation or a phenomenon, through which would be the results, if the experiment actually occurred. In other words, a mental experiment is a resource of the imagination (it consists of narrating a fictitious situation), which has enough logic to make it possible to imagine coherent results, so that these results allow us to explain something.

If you take the three nested n-cubes here symbolically depicted on the plane **a-Small** cube, you layer around it a certain number of unit cubes, create the **b-Middle** n-cube, layer another certain number of layers, create **c-Large** n-cube, where volume of **a-Small** n-cube is equals to volume of difference of **c-Large** and **b-Middle** n-cubes. Note: the edges of n-cubes are whole numbers **a, b, c**. The same approach is suitable for concentric balls with radii $a < b < c$ natural numbers, where volume of $B_a^n = \text{volume of } B_c^n - \text{volume of } B_b^n$. Note for $n > 3$ instead of volume should be **measure** defined below.

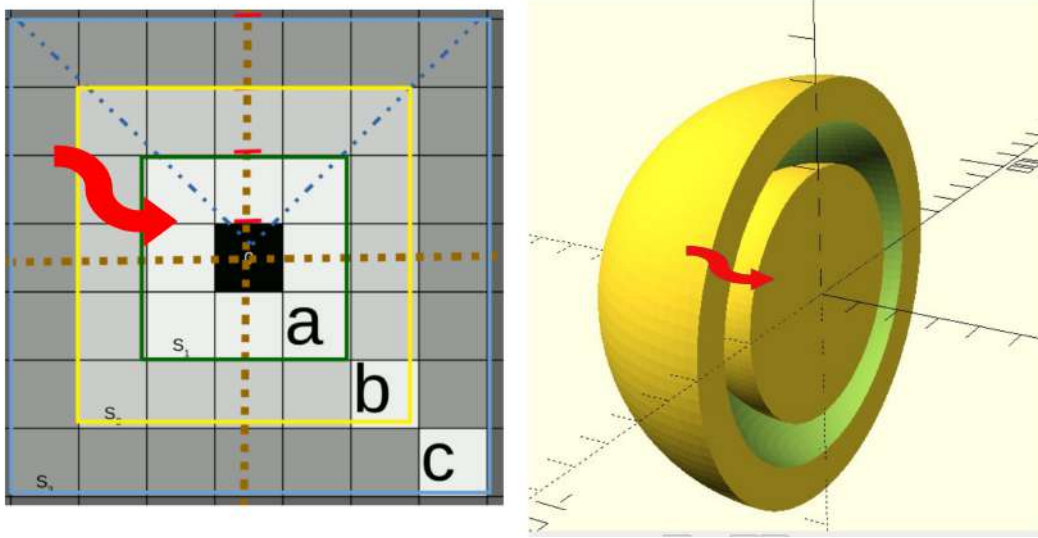


Рис. 4.1: Concentric n-Cubes and balls with natural numbers edges / radii **a, b, c**

You have got a construction that doesn't really exist in nature for the case n greater than two, it's amazing! You will never be able to put each point / unit cube from a small ball B_a^n in correspondence with another point / unit cube of this subset of layers between the middle and the large one or $B_c^n \setminus B_b^n$. in such a way that you do not destroy the symmetry of the construction and do not allow voids.

In general, these subsets are not equivalent. This is the main idea of the proof. The reason is that this figure has the property of central symmetry and does not contain any inhomogeneities. As a result, each layer in this figure is not comparable to any other layer. So each layer in this figure is not reducible to another layer. Additivity conditions and **axiom of measure** do not work here. In other words, it is impossible to speak of an addition of volumes. The mathematicians of ancient Greece introduced the concept of

[incommensurability](#) of linear segments. We will make sure that arithmetic operations of comparison or reduction of layers are prohibited.

5 Objections

Why did Andrew Wiles need more than a hundred pages to prove it, when half a page is enough, or six faces of a wooden cube for a child? Rospatent found the author guilty of plagiarism with Andrew Wiles' prove, for which he received an Abel prize in 2016. Rospatent refused to register the author's patent No. 2021501435/49 of 20 March 2021 for an industrial design in the form of a wooden cube with a proof of Fermat's Last Theorem on it under the pretext of violation of public morality. Rospatent's claim of plagiarism of the proof does not stand up to any criticism because the proof you see is original and new and it really brakes the stereotypes formed in science about the absence of a short proof of this theorem.

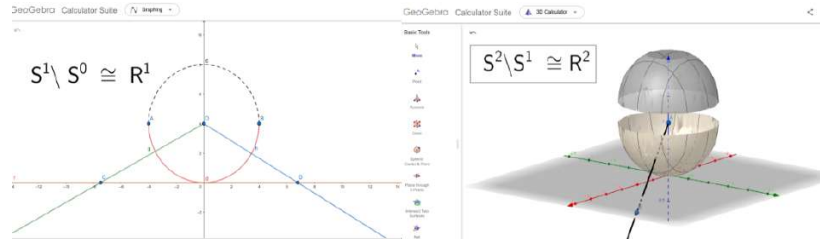
6 Symmetry. Isotropy and homogeneity of space.

We distinguish between a ball and a sphere that surrounds the ball. The sphere is the so-called layer for the ball or n-cube underneath. A sphere has one unit less dimension than a ball. This is clear from physics and maths lessons. Remember the formulas for the length of a circle $2\pi R$ and the area of a circle πR^2 , the area of a sphere $\frac{4}{3}\pi R^3$ and the volume of a ball. It is interesting to imagine that in the one-dimensional world we would have such an open ball in the form of a segment, excluding its endpoints or zero-dimensional balls located at a distance r from the origin. Below is a sphere of dimension $n - 1$. This is also a sphere, but of smaller dimension. It is no coincidence that there is a sign of [homeomorphism](#) $\cong$ of figures here.

Let's imagine that we dissect our n-dimensional ball by hyperplanes, starting with the simple case of four-dimensional space. What do we see? This three-dimensional ball centred

on the origin is the result of the intersection of the 4-dimensional sphere with the 3-dimensional subspace $\mathbb{R}^3$. You can see the equator on the sphere. Here we see the northern and southern hemispheres, the equator is excluded. The equator becomes a meridian when you rotate it ninety degrees.

Рис. 6.2: Dimensions of hemispheres and planes



Now, for the case of the 2-dimensional plane, the open ball becomes the familiar circle, excluding the 1-dimensional sphere already considered. Finally, for the 3-dimensional case, we have the usual ball resembling a football, closed by a 2-dimensional sphere. Again, we exclude any meridian from the sphere. As a result, we know the sequence of geometric elements on the sphere from dimension 1 to $n-1$. These are the so-called hyper-meridians, which will be useful to us in the future.

Imagine a cascade of spheres and an enclosing meridian for the largest sphere. If $\exists$ is a triple of natural numbers a, b, c (see the existence quantor $\exists$ for a short notation), then in this case we can map every point of space in this interval between the middle sphere and the big sphere into a small sphere $k \int_b^c r^{n-1} dr = k \int_0^a r^{n-1} dr$, where k - some coefficient depends on the dimension of space n . And since this whole construction is symmetric, this means that any surrounding of these spheres can be mapped into a set of spheres. Note, that $S^m \setminus S^{m-1} \cong \mathbb{R}^m, \dim(S^m) = m$, where $\mathbb{R}^m$ is the space dimension of m , see Figure 2 above.

$$\{S_j\} \mapsto \{...S_i\} \quad (6.1)$$

which means that the set containing only the element layer S_j is mapped to the set of the layer containing the element S_j by equivalence function, i.e. point to point is mapped in $\mathbb{N}_1$ unit to unit $1^n \mapsto 1^n$. In other words, there is a certain equivalence function $F(X) \rightarrow Y$ mapping the open set X to the set Y . Each image has a preimage. When explaining the integral, teachers often operate with the notions of splitting

a figure, a ball B_r^n into separate pieces or differentials S_r^{n-1} , like cutting a lemon, which are later reassembled into a whole. It is more usual for high school students to talk about integration, but the application of higher math will be unnecessary here. Enough to write the equation above. In our construction of a set of continuously following spheres forming open spheres, regardless of size, always a large sphere contains a smaller sphere, in its turn a smaller sphere, and so on. In primary school we study the texture of a cut tree, the layered structure of the Earth's crust in a section, the traces of layers on a probe taken from a super-deep well - all are examples of [induced topology](#). Fermat's Last Theorem excludes the existence of such a symmetric construction, given the conditions of equivalence and continuity. Why not? To understand this phenomenon, we need to analyse equation (6.1) by elements:

Таблица 6.1: Any spheres from preimage can be mapped into image by each element separately.

Sphere	$Element^{m-*}$	...	$Element^2$ -sphere	$Element^1$ -circumference	Radius
S_j^m	$S_j^m \setminus S_j^{m-1}$	...	$S_j^2 \setminus S_j^1$	$S_j^1 \setminus S_j^0$	j
$\downarrow$	$\downarrow$	...	$\downarrow$	$\downarrow$	...
S_i^m	$S_i^m \setminus S_i^{m-1}$	...	$S_i^2 \setminus S_i^1$	$S_i^1 \setminus S_i^0$	i
S_{i-1}^m	$S_{i-1}^m \setminus S_{i-1}^{m-1}$	...	$S_{i-1}^2 \setminus S_{i-1}^1$	$S_{i-1}^1 \setminus S_{i-1}^0$	i-1
...	...	...	...	...	...

Each layer contains elements of dimension 1 to $m = n-1$. The observation structure has been layered from the periphery j... i, (i-1) towards the centre therefore, the indexes are listed in descending order. The equivalence function maps each element of the layer S_j separately to the set of elements of the corresponding dimension.

To ensure the simultaneous matching of the elements of the layer more than to one dimension is impossible due to the [unsolvability](#) for $n > 2$ of the stipulated below system of $n-1$ equations), where i and j means natural radii of concentric spheres:

$$\begin{cases} j^{n-1} = i^{n-1} + (i-1)^{n-1} + \dots \\ \dots \\ j^2 = i^2 + (i-1)^2 + \dots \\ j = i + (i-1) + \dots \end{cases} \quad (6.2)$$

Each equation has at least two or more terms. This series of equations continues from $n-1$ to the power of 1. Any element of arbitrary dimension can only be mapped by the equivalence function into an element of the same dimension. In other words, there is a construction similar to what we have done: a set of successive spheres around the origin form a ball. The structure of the layers is determined only by the dimensionality of space and does not depend on the geometric size of the layer. The condition of equivalence or equality of volumes (more precisely **cardinality** for a set of points for any n -dimensional space) of the mapped layers means that any arbitrary layer of a large sphere can be mapped into a natural number of layers of a set of successive small spheres.

The number of layers in the **image** on the right side of each equation is ≥ 2 , since 2 is the natural number after 1. This leads to a system of equations that is unsolvable even in real numbers. You can check this with the **triangle inequality** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for metric space, where the sum of the lengths of the legs of the triangle is greater than the length of the hypotenuse, except for the zero case, which is excluded by the conditions of Fermat's Last Theorem. If the number of terms in the system of equations (6.2) is more than two, you can concentrate on the last pair of equations, where x^2 is the square of the length of the vector and x is the projection of that vector onto any fixed axis, and then, using the associative law for terms of the same dimension, reduce the problem to the triangle inequality.

7 Why do Pythagorean triples only $\exists$ on the 2D?

Pythagorean triples were known to mankind thousands of years before Pythagoras himself was born, since the time of the Sumerians, who used them to solve trigonometric problems easily. What are the special features of a 2D plane compared to an n -dimensional space, $n \geq 3$? To find the simplest answer, we can use the good old reel-to-reel tape recorder, where the tape is wound from the left reel to the right reel or vice versa. In this case, the sum of the areas of the left and right tape circles remains constant and is equal to the thickness of the tape multiplied by its length. Let's

assume that we have captured the moment when the left side of the spool has a radius j greater than the right side of radius i . When we talk about the need to maintain the symmetry of the figure when displaying or moving a layer continuously, this means that one turn of the tape on the left should fit into the whole number of turns of the spool on the right: two, three, four, etc., but not fractions, otherwise the condition of maintaining symmetry when moving or displaying layers will be violated. In fact, the partially filled layer has a symmetry defect, it is asymmetric. If we can make a ribbon of any thickness, then for any given ratio of the radii of the coil circles we can easily achieve symmetry in this model, namely: one layer or coil on a large coil is equivalent to a set of complete coils or layers on a small coil.

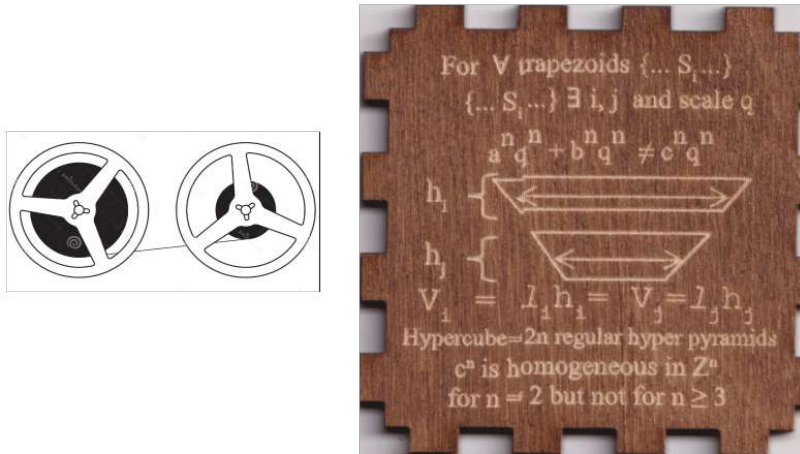


Рис. 7.3: Equivalence of layers on the 2D plane for circles and squares. Photo of author's 3D-cube

Actually, this is not a single layer, but an ordered set of layers $\{S_j...\} \mapsto \{...S_i\}$. In the prototype, S_j is the first element, and in the image, S_i is the last element. This implies that the integer radii of the layers are $j > i$ at least $j = i + 1$ otherwise one can simply rewind the tape or change the coils. For the number of terms in system of equation (6.2) greater than two, one can focus on the last pair of equations, where x^2 is the square of the vector length and x is the projection of that vector onto any fixed axis, and then apply the law for terms to reduce the task to the triangle inequality.

Note that the picture is similar in the case of an n -cube (defined below) of dimension 2 or, more simply, a square on a plane. Because of the symmetry, it is convenient to concentrate on studying a single segment formed by rays emanating from two adjacent vertices and apply the formula for the area of a trapezium by the product of the length of the median line by its height on the right). As a result, the

volume is stored measure as a subset of layers mapped into a set of successive and continuous layers closer to the centre, and the symmetrical shape of the structure under study.

It is not necessary to be able to integrate

It is not necessary to be able to integrate in order to calculate the volume of a (hyper)pyramid - it is enough to learn how to dissect a (hyper) cube into identical hyperpyramides by number (hyper)faces. And don't just limit yourself to correct (hyper) pyramids. To do this, you can mentally fill the pyramid with liquid, placing it in a homogeneous gravitational field, you can apply Pascal's law and notice that the pressure on the base of the pyramid depends on the weight, mass, volume of the pyramid, but ultimately, it is uniquely determined by the height and area of the base, regardless of the shape of the pyramid. Apply the resulting formula $\frac{H}{n}S$ to 2D, 3D, 4D . . . and make sure that it corresponds to the area of the triangle and the volume of the pyramid known from the school curriculum. Remember that the area of S corresponds to the measure of the face of dimension $n-1$. Creative imagination simplifies calculations and makes integration unnecessary in some cases!

The figure 7.4 resembles a square-section stranded cable, where only axial symmetry is observed, but not central symmetry.

Таблица 7.2: Symmetry in four-dimensional space $n = 4$.

Symmetry with respect to:	Symmetry with respect to the subspace $\perp$ by dimension	Symmetry along the subspace $\parallel$ by Dimension (degree of symmetry)	Where the point will be displayed with coordinates (x_1, x_2, x_3, x_4)
I	II	III = $n - II$	IV
Cubes along the axes X_1, X_2, X_3	3	1	$(x_1, x_2, x_3, -x_4)$
Planes $(X_1 \times X_2)$,	2	2	$(x_1, x_2, -x_3, -x_4)$
Axes X_1	1	3	$(x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$
Points at the origin and center of all hypercubes	0	4	$(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$

What prevents us, in the case of three or more dimensional

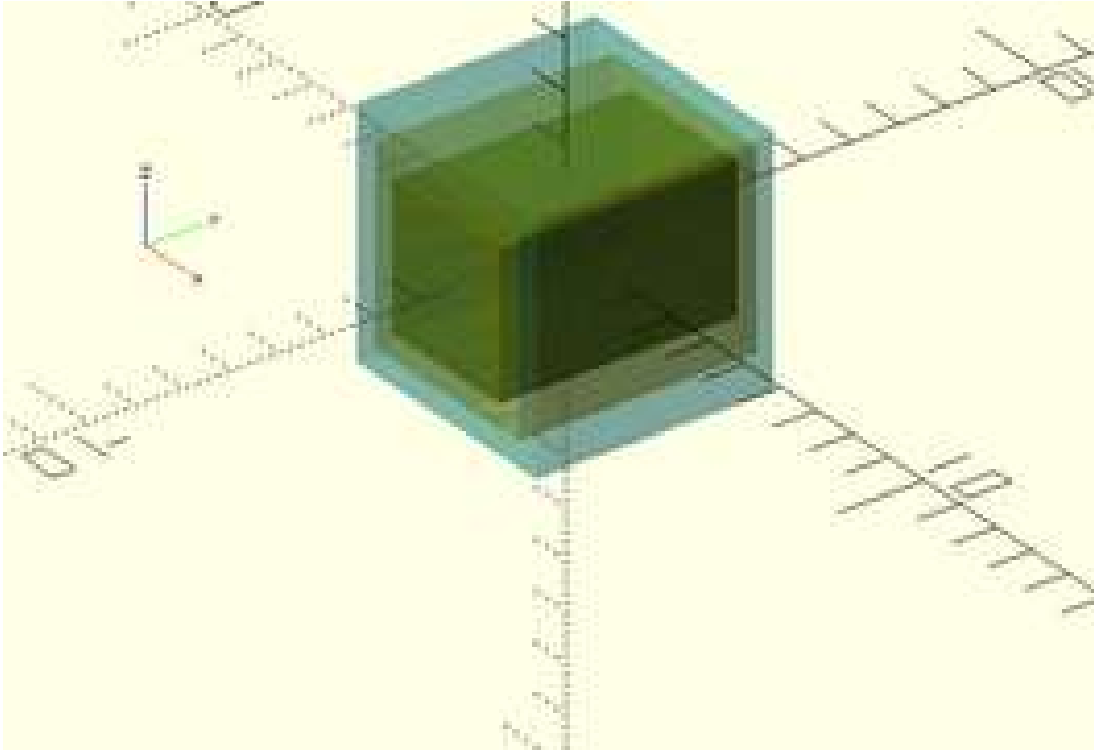


Рис. 7.4: An example of a Pythagorean triple in 3D. Only the axial symmetry is observed. A figure corresponding from the standpoint of set theory to an arithmetic expression $(5^2 \setminus 4^2 = 3^2) \times 5^1$

space, from "unwinding" layer by layer (sphere by sphere) from a large sphere into a small one, like unravelling a knitted thing from a woollen thread? Let's try to consider this question from the perspective of "pure mathematics for which it is necessary to briefly consider some concepts of set theory, continuity of functions, metric topology, homeomorphism, pairwise non-overlapping equivalence classes.

At school and university, in physics, geometry, drawing, engineering graphics or 3D modeling classes, students are used to working with axial symmetry, symmetry relative to a plane built on certain axes, as well as with central symmetry. It is easy to generalize the above table to the n-dimensional case.

What prevents us from carrying out a similar experiment in the case of three and more dimensional space? To answer this question, it is necessary to briefly consider the concept of set theory, continuity functions, metric topology, homeomorphism, pairwise disjoint equivalence classes.

The FLT proof boils down to solving the problem of an irreconcilable conflict between a centrally symmetric shape and content in a construction of three concentric spheres $B_c^n \setminus B_b^n \not\cong B_a^n$ with integer radii $a, b, c \in \mathbb{Q}$ for the case of the dimension of the space $n > 2$, since symmetry and the condition of preserving the measure (volume) under equivalence relations would also have to be fulfilled for an arbitrary "large" plane mapped into a set of "small" planes, but $\nexists \{S_j\} \mapsto \{\dots S_i\}$. It is the conflict that is formulated on the title page of the monograph.

8 Continuity. Homeomorphism. Equivalence classes

Russian figure skater Kamila Valieva, she is plastic, she performs a beautiful smooth dance. You can see Kamila Vialieva doing different figures and these images are reversible. You can play the film backwards. Similarly, imagine a certain function $f(X) \rightarrow Y$ mapping the open set X to the set Y . Each **image** has a **preimage**. And for mutually reversible functions $f^{-1}(Y) \rightarrow X$. In this image, a point can have an **open neighbourhood**, for instance in the form of ball. Suppose that point A is completely mapped onto this neighbourhood of point B . This is the definition of continuity. Speaking of **homeomorphism**, we note the interesting transformation of a mug into a torus and vice versa. In terms of topological theory, equivalence functions help to prove Fermat's Last Theorem from the other side by the impossibility of constructing three concentric balls defined above with the centre at the origin and with integer radii such as $B_c^n \setminus B_b^n \mapsto B_a^n$ in homogeneity and continuity space.

9 An understanding of Set Theory.

The following information is essential for an understanding of set theory. 3D modelling offers great opportunities to demonstrate the operations of intersection, union and subtraction of sets. And this is the notation of an empty set $\emptyset$. Here is the notation of a universal set U . In the **Euler-Wien Diagram**, the universal set corresponds to the whole rectangle. Basic knowledge of the complement of a set would be useful [6]. Chessboard - well known illustration of the **Cartesian product** denoted as $\times$. But why only numbers? The most common metal hammer on a wooden handle can be seen as the result of operations of **difference** of sets, such operation as **union** $\cup$, intersection $\cap$, subtraction $\setminus$. The author urges the reader to turn to mathematical forums, online courses and a reference book for initial information in the listed areas of knowledge.

When working with 3D figures, you can see the advantages of knowing the basics of set theory and, in addition, check the effect of **distributive rules** when expressions can be rewritten

in two ways. For example, it is easy to get a cascade of spheres, see formula (6.1) above and table ??.

10 Cardinality of Set and Equivalence function

The cardinality of a set is nothing more than the number of elements in it. This concept is easy to understand using examples. Consider the set $\mathbb{A} = \{\blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle\}$ of triangles and the set $\mathbb{B} = \{\star, \star, \star, \star\}$ of stars. These sets are called equal-power sets because they have the same number of elements, denoted by these symbols A is equal to B or $|A| \sim |B|$. It is easy to see that the set of natural numbers $\mathbb{N}$ is equivalent to the set of integers $\mathbb{Z}$, because each pair: $1 \mapsto \pm 1$, $2 \mapsto \pm 2$, $3 \mapsto \pm 3$ and so on is numbered with one number. Such a set is called a countable set. The set of natural numbers $\mathbb{N}$ is countable. And the set of rational numbers $\mathbb{Q}$ is also countable. The mathematician Georg Cantor proposed an original way to approach each number as a fractional division p of q . Imagine a large cinema with rows p and columns q . You walk around this cinema like a checker to find a stowaway, but you follow the diagonals obliquely, going for example to the upper left corner, and now you start moving along the zigzag line and gradually examine each seat in this infinite cinema, you will find a stowaway.

So the set of rational numbers $\mathbb{Q}$ is countable. In the case of the real numbers $\mathbb{R}$, which include irrational numbers that cannot be represented as fractions, this is not true.

It is important to remember that when we talk about relations of continuous and mutually reversible functions, we can only compare spaces of the same dimensions. Let's take a pencil, for example. You can imagine a point source of light illuminating it from above, and this vertically oriented pencil is mapped to a point, but you can't do the inverse transformation from a point back to a pencil, because the principle of mutual unambiguity is violated. The antipode of mutual unambiguity is, for example, the axiom-defined operation of [measure](#) $f : R^n \mapsto R$ over sets or the volume of a figure for the 3D case. [Measure](#) has the property of [additivity](#).

11 Metric topology

Author is forced to resort to set theory, binary functions and the basics of topology [5]. A collection of sets in the form of open n-cubes e^n with the centre at the origin, i.e. the [Cartesian product](#) of the open segment $e^n = (-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})^n$ defines the [base](#) of the topology Ω in the metric space R^n [clause 3.1. in 4] The equivalent topology is set by a set of sets in the form of open balls - only their metrics differ: $\max(x_j) < r$, for the first and $\sum_1^n x_j^2 < r^2$ for the second [clause 4.3. 5]. Below, under the words hypercube and layer, an open sphere of dimension n, radius r B_r^n and its closure - a sphere S_r^{n-1} of dimension n-1 and radius r will also be used.

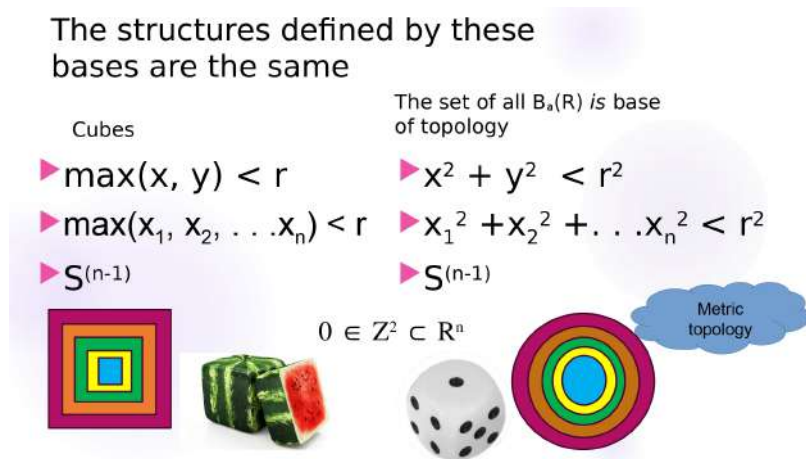


Рис. 11.5: Nested n-Cubs and Balls

The structures defined by these bases coincide. You say that metric topology is defined here, and we have a metric space. So a sphere and a cube are the same, just slightly deformed in topology. Compare this cubic watermelon and the rounded cube. Let's imagine nested open balls. Because the spheres themselves that enclose the ball do not belong to this set. For the n-dimensional case everything works the same way, but here instead of two coordinates there are n coordinates. The sum of their squares is still less than the radius R squared. What about cubes? - The picture is not fundamentally changed, just used a slightly different metric, where instead of the square is substituted function maximum value of X or Y less than the radius R for the case of n-dimensional space we will have n variables listed here.

A similar pattern of nested layers to the [Russian Matryoshka doll](#) can be seen on the two-dimensional plane [piercing](#) the n-cube. We would like to emphasise [piercing](#) and not

dissection, because from the basics of linear algebra it is easy to understand that a cube is dissected by such a plane into two disconnected spaces, and for a higher dimensional space. Starting from the tesseract, a 2D plane can be enclosed by a continuous contour transverse to it. The picture resembles a [baked apple](#) on a skewer. In fact, from the linear algebra course, if $AX = 0$ then $\text{rank}(X) = n - \text{rank}(A) = n-2$, so starting from 4D, the plane can be threaded like a thread through the eye of a needle. Unfortunately, this revealing fact is not understood by some scientists when they encounter a chain of n-cubes nested inside each other!

For the balls situation is self-evident. But we have seen that in topology a ball and a cube are homeomorphic to each other and are easily transformed into each other as a result of deformation without breaking the space. It turns out that on a perfectly smooth homogeneous surface of an n-dimensional ball there are geometric elements of all dimensions from 1 to n-1 hyper-meridians. For the case of a n-cube of dimension two or, more simply, a square in the plane, the picture is similar. What prevents us from making a similar experiment for the case of three and more dimensional space? To answer this question, it is necessary to familiarize ourselves with the concept of [pairwise disjoint equivalence classes](#).

12 Pairwise disjoint equivalence classes

Look at a photo of the Taj Mahal, a monument of Indian architecture. It has symmetry with respect to the vertical axis passing through its centre. We can say that the mirror just plays the role of an equivalence relation. Symmetry is one of the types of equivalence functions.

There are other examples, such as homeomorphic figures already familiar to us, such as displacements, rotations, and so on. Note that the Taj Mahal is made up of different elements, columns are mapped into columns, domes into domes and there is no mixing. Another example is chess. While the game is played on parity, pawns are exchanged for pawns, light pieces: Bishop, Knight - for light pieces, heavy pieces Rook are exchanged for Rook or Queen for Queen. These are pairwise disjoint equivalence classes. The equivalence function deals with each class separately, it is

easy to prove strictly mathematically. There is no mixing going on.

$$S| \sim = \{S_{n-1} \setminus S_{n-2}, \dots, S_2 \setminus S_1, S_1 \setminus S_0\} \quad (12.1)$$

(in particular, for $n = 3$ these are two hemispheres excluding a circle in the plane $(0, x, y)$, a circle excluding two endpoints $[0, 0, -r/2], [0, 0, r/2]$. The expression $S| \sim$ denote factorization of layer useful for analysis of its elements. Each of the listed classes has the dimension of the subspace to which it belongs

$$S_m \setminus S_{m-1} \cong \mathbb{R}^m, \dim(S) = m. \quad (12.2)$$

Applied to our construction of three concentric spheres or n-cubes. Any element of any dimension can only be mapped to an element of the same dimension by the equivalence function. Let's focus on the formula layer $\{S_j\} \mapsto \{\dots S_i\}$ in a collection of layers. Such a formula is called a **restriction** of equivalence relations to a layer, as if the set had been placed there with a stencil. Because of the central symmetry, the image of a layer should also be symmetrical - the set of continued layers.

13 Chain of n-cubes

As mentioned above the **a-Small** n-cube a^n is the set of layers indexed from 1 to k , the **b-Medium** b^n is the set of layers from $k+1$ to $k + l$ and the **c-Large** c^n is the set of layers from $k+l+1$ to $k + l + m$. The layer is defined as the subset difference $S_i = e_i \setminus e_{i-1}$, $i > 1$, where e_i denote n-cube with edge i . Here below is a totally ordered set of layers (also named as simply ordered set, linearly ordered set. Sign $<$):

$$e_0 \subset e_1 \subset e_2 \cdots \subset e_{k+l+m} \subseteq U \quad (13.1)$$

or

$$e_0 < S_1 < S_2 \cdots < S_{k+l+m} \in U \quad (13.2)$$

The first hypercube e_0 denote 1^n or 2^n , in parity, but given the enclosures below, this detail is not leads to qualitative differences. A set partition one can see above. A chain of sets (6) define a topology in $\mathbb{Z}^n$. On the other hand, this formula describes a one-dimensional probe penetrating three

nested hypercubes through a common centre. The result of the **Cartesian Product** of two orthogonal probes can be seen in 4.1 above, so the researcher can obtain a two-dimensional plane regardless of the space dimension.

Definition 13.1 The layer is defined as the difference of subsets $S_i = e_i \setminus e_{i-1}$, $i > 1$, where e_i denotes an n-cube with edge i .

The topology of n-cube is induced on this subset because $0 \in \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{Z}^n \in \mathbb{R}^n$. There is no parallax effect.

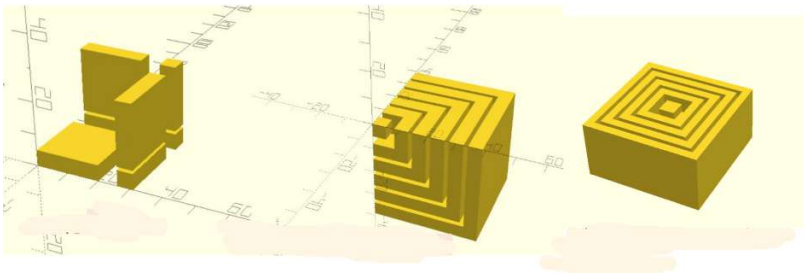


Рис. 13.6: The construction of one layer (left) and set of layers in the octant (+, +, -)

Let's try to create a construction in OpenSCAD

```
//*****
// Listing 1 Layer.scad
// This program creates a 3D corner from
// elements of different dimensions (2-D siding)
// a pair of corners 1-D and the vertex of the cube 1^n -
0-D
// The vertex of the corner is at the beginning of the coord.
// (center=false, not center=true)
//*****
q = 5; // Sets The Scale. Do not forget the sign ";"
edge = 5*q; // Edge dimension n-cube
step = 1.5; // Step or gap step >= 1
cube([edge,edge,1],center=false);
// Lower face of the cube, orthogonal Y, edge size
translate([edge + step,0,step])
// Moving the course to a point with a coord. (x,y,z)
cube([1,edge,edge],center=false);
// The face of the cube, orthogonal to the X axis
translate([edge + step,0,0])
// The translate operator without ; is followed by a figure
cube([1,edge,1],center=false);
// The edge of the cube located across the X-axis
```

```

translate([0,edge + step,0])
cube([edge,1,1],center=false);
// The edge of the cube located across the Y axis
translate([0,edge + step,step])
cube([edge,1,edge],center=false);
// Cube face, orthogonal Y axis
translate([edge + step,edge + step,step])
cube([1,1,edge],center=false);
// The edge of the cube, located parallel. Z
axes ranslate([edge + step,edge + step,0])
cube([1,1,1],center=false);
// Vertex of the cube.

```

As a result, you will get a layer, and together with the program cycle:

```

for (j = [ i : -1 : 1]) //Slightly modified listing 1}

```

to build layers from the periphery to the center, the counter $j = i, i - 1, i - 2 \dots 1$ is used - a set of layers or, more simply, a corner is formed, as in the figure 13.6

[Гал15]: Гальперин (2015),
Многомерный куб

The dimension of the n-cube layer can be seen from the well-known [Newton's binomial](#). See also [Гал15] To understand what elements an arbitrary layer S_i consists of, use [Pascal's triangle](#), in which the coefficients $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, the number of combinations are written in rows, and each coefficient, with the exception of the extreme ones, is obtained by summing two adjacent ones located a row above, here are its first lines: 1-2-1, 1-3-3-1, 1-4-6-4-1, etc. as in the table 13.3 in the margins of the book.

Таблица 13.3: Pascal's Triangle

n	Binomial. coefficient.
1	1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
...	...

As a result, the senior member of the polynomial below disappears, and the degree of the polynomial decreases to $n-1$. The sign of the sum Σ can be replaced by the union sign $\cup$. The dimension of the n-cube layer can be seen from the decomposition of [Newton's binomial](#). To simplify its appearance to one layer, use Pascal's triangle, where the binomial coefficient is written in rows. As a result, the higher term of this polynomial disappears and we are left with the highest degree, n minus one. You can replace the sum sign Σ with the union sign $\cup$. Here, understanding the structure

of the layer gives the following formula

$$S_i = (i+1)^n - i^n = e_{i+1} \setminus e_i = \bigcup_{k=1}^{k=n-1} C_n^k i^k 1^{n-k} \quad (13.3)$$

Look at this corner (13.6 left). And this is a cascade of corners (13.6 centre) that together form a cube (13.6 right). The Cartesian product of a linear segment per square forms a cube. This shows that the principle of dimension is respected. The above formulae are derived from the Newtonian binomial and describe the plane as the difference of successive hypercubes with a common vertex coinciding with the origin.

Another way of representing the construction under study, "the origin of the coordinates located at the centres of the hypercubes is obtained by iterating n reflections of hyperplanes, i.e. multiplying by 2^n , which does not fundamentally change the nature of the formula. Both geometric constructions are transformed into each other by reflections from hyperplanes perpendicular to each of the n coordinate axes, or by cutting and scaling the figure. Each layer of the hypercube has elements of dimensions $n-1, n-2, \dots, 1$ (hyper)faces, and the edges of such elements are described by the formula $i^k 1^{n-k}$ - i.e. [cuboid](#). If we neglect the binomial coefficients, then the resulting formula coincides with the one previously obtained to describe the structure of the sphere (12.1)

In the case of a square ($n = 2$) n in the plane, see above Figure 7.3 on the left the formula for the area of a trapezoid by the product of the length of the median line by its height. As a result, both the volume, the power of subsets, in the form of a plane mapped into a set of successive and continuous planes, and the symmetrical shape of the structure are preserved.

It is important to remember that when we talk about relations of continuous and mutually reversible functions, we can only compare spaces of the same dimensions. Summarising the above, we can conclude that a point cannot be equivalent to a linear segment, a segment to a linear square or a circle in the plane, and these last figures to a three-dimensional cube. It is only possible to establish a continuous, mutually unambiguous correspondence between figures of the same dimensions. The same principle applies to a discrete space made up of elementary cubes. This is a clear demonstration of the [correspondence principle](#) in science. The term "correspondence

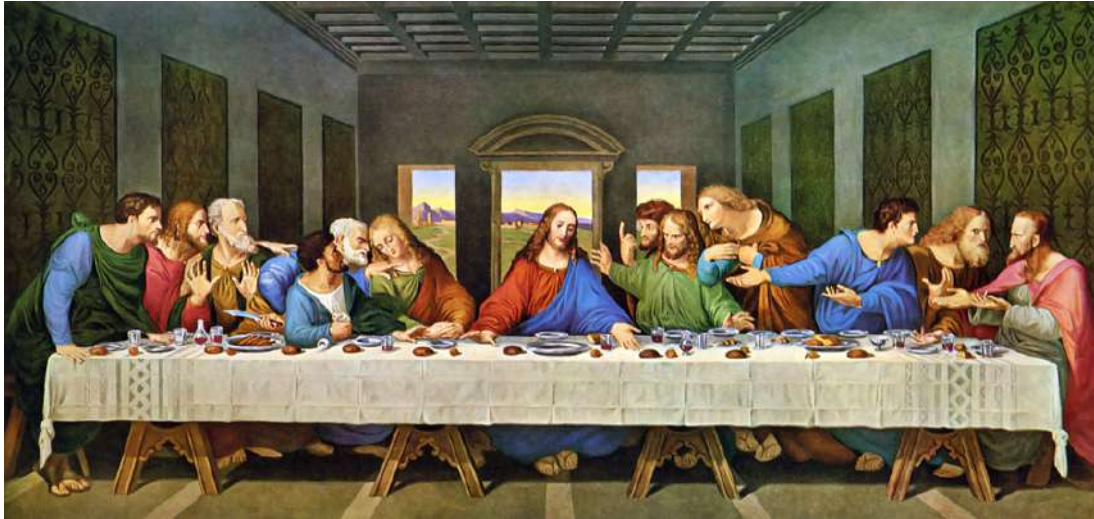


Рис. 13.7: L'ultima Cena The painting The Last Supper by Leonardo da Vinci demonstrates the parallax effect. All the lines: the continuation of the corners of the walls, ceiling, and floor converge at the vanishing point - on the forehead of Jesus Christ. This creates a sense of spaciousness

principle" is used in a more general sense to mean the reduction of a new scientific theory to an earlier scientific theory in appropriate circumstances, for example, Einstein's special theory of relativity reduces to classical mechanics at speeds small compared to the speed of light.

14 Euclid's Axioms in XXI

Euclidean Geometry is also known as plane geometry. It deals with the properties and relationships between all things. It is possible to supplement Euclid's Postulates with elements derived from elementary unit cubes lined up in a row, a rectangle, a three-dimensional cube and so on. Note, that we work in n -dimensional space!

Таблица 14.4: The postulates of Euclid in discrete space

Figure in Euclidean space R^n	Analogue in Z^n	Dimension
A dot	1^n	0 or n^*
A linear segment	A set of 1^n lined up in a row $i^1 * 1^{n-1}$	1
A plane	A set of 1^n ordered in a square $i^2 * 1^{n-2}$	2

* depending on the situation.

In the digital age, we can supplement Euclid's postulates with the following elements derived from elementary unit cubes lined up in a row, a rectangle, a 3D-cube, and so on. The dimensions will be as if we were dealing with points.

For example, $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ corresponds to formula (8). In addition to the axioms of Euclid, it is useful to analyse the constructions we have studied from the point of view of the axioms of topology, which are well described in a number of textbooks, e.g. We have already discussed the concept of metric and topological space (see figure 4). From the axioms of topology, the correspondence between a point in the space R^n and an elementary n -cube 1^n in the topological space Ω is even clearer. The elements 1^n in a topological space can be created by combining operations, differences, Cartesian product of sets of elements with dimensions from 1 to $n-1$. Note that the clause 0 or n , depending on the situation in the first row last column of Table 2, means that in the formula (8) above $i^k 1^{n-k}$ of the cuboid the multiplier 1^{n-k} has no dimension. On the other hand, by partitioning the space $1^n \mapsto e^n$, i.e. an n -cube. Spaces of different dimensions $\Omega^n \cong \Omega^k$ are homeomorphic if and only if $n = k$.

In fact, if Fermat's Last Theorem holds for triples of whole numbers, then the units do not matter, be they metres, centimetres, millimetres, micrometres, nanometres, etc. This means not only equality, but also the identity of the equation of Fermat's Last Theorem, or in other words, the independence of the result from the division of the space. A unit cube can be made as small as you like, but the essence of the phenomenon does not change. This is important for understanding for this student and for students who aren't familiar with mathematical analysis.

Separating a figure, let's say the sphere $S^2 \setminus S^1$, from its element - the equatorial circle. This is a legal technique known from Euclid's Elements from the third century BC and from school geometry courses on the plane, stereometry and drawing. Let us continue this thought. The sides of a triangle or other polygon are mapped onto the elements of another figure by parallel transfer/homothety/reflection from the axis/plane, rotation and other means. Note that if such a mapping is reversible, mutually unambiguous, then a point remains a point, a segment remains a segment (here dimensionality is preserved). The figure shows how two equivalent correct 3D pyramids are mapped, e.g. when looking at a hologram. The principle of equivalence means that a small pyramid as a whole is mapped to a large 3D pyramid, an arbitrarily chosen face is mapped to a 2D face, a one-dimensional edge is mapped to a one-dimensional edge.

Drawing and architecture are based on this principle, which has stood the test of time for at least six millennia. Why, in this situation, can we not select hypermeridians on the sphere and expect each of these elements to be mapped to the set of elements of the corresponding dimension?

Tested for millennia

Is it legitimate to isolate from the sphere $S^2 \setminus S^1$, its arbitrary $\forall$ element - the equatorial circle? - This is a legitimate technique known from the "Elements" of Euclid, formulated in the III century BC, and from school geometry courses on planes, stereometry and drawing. **induced topology**. It has been verified by architectural monuments for thousands of years.

When we work with a decorative material, such as siding for a house, it is common to measure it in square metres. Moulded products, such as railings or skirting boards, are measured in metres. But in reality, all of the above materials have certain dimensions in length, height and width. However, smaller dimensions are usually neglected. From the definition of topological space and Euclid's postulates, it follows that a unit cube or unit of degree n corresponds to a point in a space of dimension n . All the figures just listed are made of such unit cubes.

They have the dimensions we are used to from the axioms and the definition of topology. What is an axiom in mathematics? - It's the result of careful observation or a well-conducted experiment. Euclid's and topology axioms are based on the principles of physics: homogeneity, isotropy, continuity of space, symmetry.

15 A paradox

From the algebraic decomposition it follows that figures in the form of a cube with a defect in the form of a missing point, corresponding to the expression $i^n - 1^n$ a set of layers or $2^n - 1^n$ a layer (in $\mathbb{Z}^n$ provided central symmetry), indifferent to elementary transformations, have a dimensionality one unit less than the space in which these figures are created. Given the above, such expressions and figures correspond to

$B_r^n \setminus \text{point}$ or S_r^{n-1} . However, only in the plane is it possible to simultaneously fulfil the conditions of symmetry preservation and volume equality inherent in the Pythagorean Theorem.

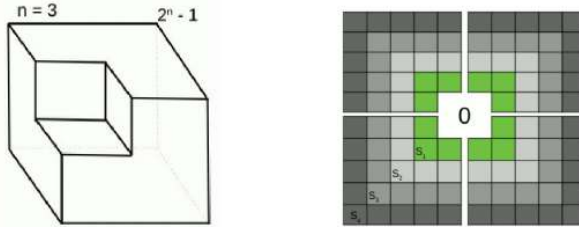


Рис. 15.8: Dimension of defect cube $2^n - 1$ is $n-1$ in central symmetry space of $\mathbb{Z}^n$

Note that $2^2 - 1$ is also a 1D figure in the central symmetry space of $\mathbb{Z}^n$, which is mapped to the 1D perimeter of the square 1^2 layer by layer. This situation is normal, because of the condition of one class equivalence for $n = 2$.

Dimension is not a trivial question in mathematics. There is a great visualisation of [Malderbrot's fractal set](#), which is defined by a recurrence formula, and such fractal sets differ from our usual sets in that as you increase the scale of the set, the same features are repeated infinitely. Imagine you're looking at a map from a bird's eye view, then you go down, you get closer to this object, you see more and more details, so these details show a more complex structure, it repeats all the time. There are no arcs, no smooth curves or straight lines. So the dimensionality of this fractal set is fractional. It's amazingly beautiful!

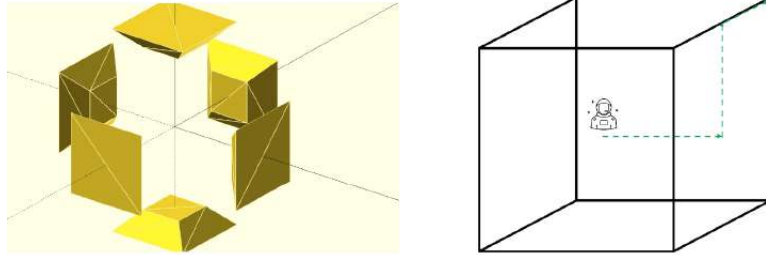
16 Journey to the vertex of the n-cube

Some respected scientists object that piercing the n -dimensional cube with a two-dimensional plane is too simple and distorts the complex structure of this cube. This misunderstanding is caused by a poor representation of what the n -dimensional cube actually is. To understand the structure of n -cube let us apply the method of setting up an experiment in virtual reality.

Astronaut Fyodor went into multidimensional space to make a trip from the origin of coordinates and simultaneously the centre of the 10-dimentional cube, whose faces are orthogonal to the coordinate axes, to an arbitrary vertex of the hypercube. The movements made by the astronaut imposed restrictions:

allowed movements only in the direction or against the direction of any of the n coordinate axes. Fyodor made n jumps: the first one from the origin of coordinates to the centre of the face of the highest dimensionality $n-1$, and all the rest - across the first jump. At each step or jump, Fyodor changed the direction of motion, turning at right angles.

Рис. 16.9: Fyodor made n jumps: the 1-st one from the origin of coordinates to the centre of the face



The astronaut's logbook after the experiment looks like this:

- ▶ Starts from the Deceract in the direction of the axis.
- ▶ I'm moving into the Enneract in the direction of the axis.
- ▶ Moving in an Octeract against the direction of the axis.
- ▶ Moving into the Hepteract in the direction of the axis..
- ▶ I'm moving into a Hexeract against the direction of the axis..
- ▶ Moving in a Pentact against the direction of the axis.
- ▶ Moving into the Tesseract against the direction of the axis.
- ▶ Moving into the Cube in the direction of the axis.
- ▶ Moving to the Square in the direction of the axis..
- ▶ Moving into the Segment in the direction of the axis..
- ▶ Moving towards the Vertex against the direction of the axis.
- ▶ Finish!

(It is easy to guess that with the existing restrictions on movement along/against the axis direction, Fedor will be able to freely visit $\forall$ of $2^{10} = 1024$ vertices of the hypercube.)

In the last three steps we, as three-dimensional beings, could see the sudden appearance of Fyodor in the centre of a three-dimensional cube from the invisible to us four-dimensional space, followed by a jump to the centre of the wall, ceiling or floor - at the discretion of Fyodor, after which from a

2-dimensional square - a jump to the centre of the edge and finally, the last step - arrival at the top.

Analyzing the two-dimensional and three-dimensional cases and generalising the result to the n-dimensional case, it is easy to calculate the length by formula $\frac{i}{2}\sqrt{n}$ of the distance from origin of coordinate to vertex. The edge of an n-dimensional cube lies in the hyperplane perpendicular to the height just constructed and passing through the base of this height - the point of intersection of the straight line with this edge.

Note, that from Fyodor's point of view, all faces of the n-dimensional cube are perceived not as n-dimensional, but as flat figures.

Without changing the generality, we can arrange the indexes of the coordinate axis in ascending / descending order and get the following result in the form of the ship's Log of cosmonaut Fyodor. At the end of the flight, we turn to the data of the autonavigator, where Fyodor's observations and directions of movement along each axis were recorded. From the basics of combinatorics, it is easy to see that the number of elements - the power of the set, consisting only of binary elements zero and one, is 2^n - exactly the same number of vertices in the n - dimensional cube. In this experiment, Fyodor started from the centre of the ten-dimensional cube moved only in the direction (denotes as one) or against the direction (denoted as zero) successively explored all of its faces of dimension from nine to one.

It is important to remember that Fyodor on his way observed multidimensional cubes with the effect of parallax. There are a number of examples from astronomy, everyday life, and works of visual art to explain this effect. Images of an n-dimensional cube are mesmerizing in their beauty. Let's imagine a projection of an n-dimensional cube onto a two-dimensional plane, for example, passing through the X, Y axes, without the parallax effect. What figure will it be? The answer is shown on Figure 1.. So, when we talked about piercing an n-dimensional cube with a probe, the Cartesian product of two probes perpendicular to different faces, we worked with induced topology.

In fact, Fyodor investigated nested topological subspaces $\emptyset \subset \Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \Omega^3 \dots \subset \Omega$ in the original n-dimensional space Ω , they all pass through the origin, the index from

above means the dimension of the subspace. For example, in 4D Ω : $\emptyset \subset (x, 0, 0, 0) \subset (x, y, 0, 0) \subset (x, y, z, 0) \subset \Omega$.

A relative topology is [induced](#) in each of the subspaces: concentric balls with a common centre at the origin with radii based on natural numbers (Figure 4). The dimension of the balls, m-cubes corresponds to the dimension of the subspace. For simplicity, we can imagine the last three subsets in this chain: in 3D - 2D- 1D subspaces, respectively: ball B^3 - circle B^2 - a linear segment B^1 .

17 Proof in a single formula and drawing

In the tradition of Indian mathematical treatises, the proof is reduced to a single drawing and signature: [Look!](#) For a physicist, it is usually enough to look at a 3D cube with its faces or a globe with its equator to understand the proof of Fermat's Theorem.

Let's imagine a construction corresponding to the expression $a^n = c^n - b^n$ in n-dimensional space. On the left is a symmetric figure of dimension n. On the right is a set of layers with one dimension less. This set will be asymmetric (e.g. a sphere with an irrational radius is asymmetric), or have an irreparable symmetry defect or a violation of the continuity of the layers for dimension $n > 2$ (see Fig. 7.3 above). When talking about an irreparable symmetry defect, it is important to apply the rules of dimensionality, compare the volumes (capacities) for each element of the layer separately, and then take advantage of the triangle inequality. Therefore, an object whose fundamental properties are described in a contradictory way $\exists a, b, c \in \mathbb{Q}$, such that $B_a^n \cong B_c^n \setminus B_b^n$ does not exist in nature! - This proof is given very briefly on the cover of the book. The central symmetry allows you to move to a layered comparison, but $\nexists \{S_j\} \mapsto \{\dots S_i\}$. This is the conflict formulated on the title page of the monograph.

When constructing equivalence relations, hemispheres are mapped to hemispheres and an arbitrary meridian is mapped to a meridian. In order to satisfy these conditions simultaneously, it is necessary to ensure that the sum of the cathets is equal to the length of the hypotenuse of a right triangle - one of the cathets must be zero, which is forbidden by the FLT condition. This proves Fermat's Last Theorem to be false.

It is sufficient to utilise basic educational instruments.

The study was conducted using a limited set of basic school tools, including a wooden cube for children's creativity, a globe, a chess set, a tape recorder on reels, a stencil, a right triangle, and a mirror. In the context of inclusive education, it is possible to initiate discussions on topics such as symmetry, equivalence, and uniformity of space, as well as the preservation of the dimensions of the elements being compared, by simply touching the surface of a school globe or an orange with a thread stretched along the equator. To further illustrate this concept, one can peel an orange and observe the layers within.

In contrast to the American version of the FLT proof, which is over a hundred pages in length, these straightforward tools collectively imply a conclusion regarding the asymmetry of our universe. To achieve this, the reader is directed to undertake the final experiment described in this chapter. Observe the face of an aesthetically pleasing female and note that a human being, a creature of the universe, must exhibit slight asymmetry in order to be considered beautiful. In light of the billions of years of evolution that have occurred on Earth, it is pertinent to question whether this phenomenon is merely an accidental occurrence or whether it can be seen as an embodiment of the more general principles that govern the evolution of the universe. For further insight, one might consult an intriguing volume on superstring theory and the part played by geometry and symmetry in the genesis of the universe.

The above proof is presented with a focus on school knowledge. For a deeper acquaintance with the theory of prime numbers, readers can refer to the scientific works [Apo13], [BS86].

[Apo13]: Apostol (2013),
Introduction to analytic
number theory

[BS86]: Borevich и др. (1986),
Number theory

18 The Leonard Euler hypothesis

In 1769, Leonard Euler suggested that by increasing the number of terms in an equation similar to Fermat's theorem to four, five, etc., when the degree of n exceeds the total number of compared hypercubes on the left and right in the Diophantine equation, the researcher will necessarily come to the conclusion that it is unsolvable. A number of

mathematicians and amateurs have refuted this hypothesis for the case of 4-, 5-, 7-, 8-dimensional hypercubes. (The method of decomposing one hexeract into five other hexeracts is still waiting for its finest hour.) Another generalization of Fermat's theorem to the case of four hypercubes leads to the Diophantine equation in the form: $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$. Using set theory and the Euler-Venn diagram, assuming $d > c > b > a$, one can represent an expression from the sum of four hypercubes as:

$$d^4 \setminus c^4 = b^4 \cup a^4 \quad (18.1)$$

here on the left is the set of hypersurfaces of dimension $n = 3$, on the right is the union of two hypercubes of dimension $n = 4$. The fourth hypercube a^4 is obtained by operations on layers of b^4 , but performed with deviations from the principles of symmetry of degree three in terms of the above table 7.2.

According to Fermat's theorem proved above, there is no equivalence between subsets of $(d^4 \setminus c^4) \setminus b^4 \neq a^4$. Therefore, there are chances to create a new shape from the defects of the layers (partial removal of the layer), perhaps a^4 . Let's make sure that it is possible in principle to build such a structure.

The manifold becomes disconnected

If this new construction is placed in the area of positive axis values, then when reflecting from hyperplanes and scaling, the number of hypercubes a^4 increases by $2n$, that is, by 16 times, while the figure becomes disconnected. This makes the new model radically different from the previously considered combination of three nested cubes with a degree of symmetry n - the condition of uniformity of space is violated.

And what can we say about probing a two-dimensional plane? Let's arrange the four tesseracts in such a way as to preserve the maximum possible symmetry of the degree two structure. To do this, consider the planes on the axes X_1, X_2 (remember that both axes X_3, X_4 are perpendicular to this plane.)

Since on the 2D plane $\forall$ the layer S_k is commensurate with another S_j , we build a plane stretched on the axis X_1, X_2

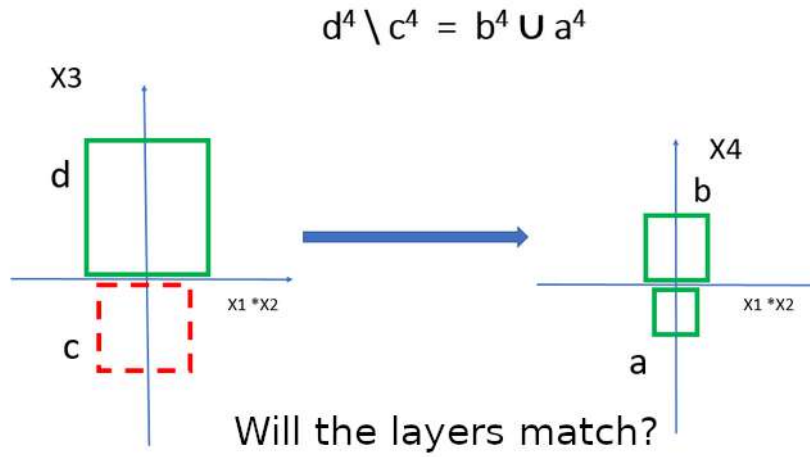


Рис. 18.10: Is the Diophantine equation $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ solvable?

(for shortening, we denote it as $X_1 \times X_2$, - the Cartesian product of the axes. For ease of presentation, we choose two-dimensional projections $d^4 \setminus c^4$ on a plane drawn through the X_3 axis and orthogonal $X_1 \times X_2$, and the projection of hypercubes $b^4 \cup a^4$ on a plane drawn through the X_4 axis, also orthogonal $X_1 \times X_2$. (The volume/measure of c^4 , subtracted from d^4 , is highlighted in a distinctive color and shading.)

Note that the two-dimensional projections of all subsets of b on $X_1 \times X_2$ are symmetric with respect to subspaces $1D \perp X_3$ and, respectively, $\perp X_4$ and symmetry along the subspace $2D \parallel X_1 \times X_2$.

Let's make sure that it is possible to find an equivalence function that displays $d^4 \setminus c^4 \longrightarrow b^4 \cup a^4$. In fact, it is possible to write in layers:

$$\{ \{S_k | c \leq k \leq d\}, \{S_l | 1 \leq l \leq d\} \} \longrightarrow \{ \{S_j | 1 \leq j \leq b\}, \{S_i | 1 \leq i \leq a\} \} \quad (18.2)$$

Here we write the mapping of a set consisting of two subsets of layers into another set also consisting of two subsets of layers (the condition for the range of layers follows after the vertical line |). It is easy to find the corresponding equivalence function based on the equality of measures $d^4 - c^4 = b^4 + a^4$, as well as taking into account the condition of layered symmetry and Fig. 17.17. As a result, you can write a formula for

cuboids, taking into account their height (see the analog of a square cable in Fig. 7.5:

$$\begin{aligned}
 c \sum_c^d |S_k| + (d - c) \sum_1^d |S_l| &= b \sum_1^b |S_j| + a \sum_1^a |S_i| \\
 \frac{c}{d^2} \sum_1^{\frac{LCD}{d}} |S_m| d^2 + \frac{1}{d + c} \sum_1^{\frac{LCD}{d-c}} |S_m| (d^2 - c^2) &= \frac{1}{b} \sum_1^{\frac{LCD}{b}} |S_m| b^2 + \frac{1}{a} \sum_1^{\frac{LCD}{a}} |S_m| a^2
 \end{aligned} \tag{18.3}$$

Here in the formula above, LCD (Least Common Divisor). $LCD(d - c, a, b, d)$. The capacities of 2D layers are written under the sum sign. The manifold in the form of a difference of tesseracts ($d^4 \setminus c^4$) is divided into cuboids projected on the axis X_3 into segments $[c, d]$ and $[1, c]$ respectively. (Compare with splitting a variety into parts when taking an integral).

In the lower equation of the last formula, the variable is replaced by a single natural counter m , which runs through the value of the ranges $1 \dots d, c \dots d, 1 \dots a, 1 \dots b$, respectively, for each set of layers. By defining an expression in this way, one can visually verify the consistent mapping of subsets of layers of the studied structure and the search for an equivalence relation with respect to symmetry with respect to the above subspaces. It is easy to make sure that it is possible to set such a partition of the structure under study, which will ensure work not with fractions, but with natural numbers - for this, instead of nodes, you can simply use the product of $(d - c) * a * b * d$ and display subsets of successive layers with power (read thickness or number of intervals) numerically equal, respectively: $h_k = d^2$, $h_l = d^2 - c^2$, $h_j = b^2$, $h_i = a^2$, as in Fig.7.3.

As a result of this representation, the Figure will have symmetry of the second degree and any layers in it will be commensurate, which indicates the potential possibility to find four hypercubes with integer edges for the above formula.

The method of determining solvability described in the last example is necessary, but insufficient condition for finding a positive answer to the question. In the penultimate example, it is a sufficient condition for formulating a conclusion about the unsolvability of the Diophantine equation.

Grundy series and Schrodinger's quantum uncertainty

How did the mathematical paradox lead the monk Luigi Grandi to philosophical and theological conclusions that turned the idea of infinity upside down?

The question of what is the result of an infinite mathematical series $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, At first glance, it may seem like a simple task, but in the XVIII century it became a real challenge for many outstanding mathematicians. This paradox, known as the Grandi series, was named after the Italian mathematician and monk Luigi Guido Grandi, who first began studying it in 1703.

The essence of the paradox lies in the fact that, despite the apparent simplicity of calculations, different calculation methods lead to different results. If you imagine a series in the form $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$, then each pair of numbers $1 - 1$ is zero, and the entire sum of the series is reduced to zero. However, if you arrange the brackets differently, for example, leave the first element outside the brackets, and then group the rest: $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$, then the amount already turns out to be equal to 1. Thus, a simple change in the order of operations leads to completely different results.

This paradox interested not only Grandi, but also such outstanding mathematicians as Gottfried Wilhelm Leibniz and Leonard Euler. Leibniz, reflecting on this problem, suggested that the correct answer might be $\frac{1}{2}$. He justified this by saying that if you stop the addition at a random point, the intermediate sum will be either 0 or 1 with equal probability. Therefore, in his opinion, the average value of the sum should be $\frac{1}{2}$. Leonhard Euler, in his work "On Divergent Series published in 1760, supported this idea and even claimed that the sum of the Grandi series and the fraction $\frac{1}{2}$ are equivalent and can be replaced by each other without error.

Historians of mathematics note that for Grandi, this arithmetical inconsistency had a deep religious significance. He believed that such a possibility of obtaining different amounts from the same series proves the divine creation of the world out of nothing. His conclusions that this paradox confirms the possibility of creating something out

of nothing reflect not only the mathematical, but also the theological views of that era.

However, despite all the arguments in favor of various results, modern mathematicians have come to the conclusion that the Grundy series does not have a definite sum. This conclusion is based on the analysis of partial sums of a series that alternate between 0 and 1 and never converge to any fixed value. In mathematics, this behavior of a series means that it diverges, that is, it does not have a specific amount.

Modern approaches to infinite series and their summation appeared due to the development of analysis in the 19th century. The concept of convergence was introduced, which allows us to determine which value the sum of a series approaches as an increasing number of its elements are added. For example, we can consider a series describing Zeno's paradox, where to complete the path you must first cover half the distance, then half the remaining, and so on. This row $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ has partial sums that are getting closer and closer to 1, which means that the series converges to 1.

However, in the case of the Grundy series, the partial sums range between 0 and 1 and do not approach any one value. This leads to the conclusion that the Grandi series does not have a certain amount. However, there are alternative summation methods, such as the Cesaro method, which calculates the average of partial sums. Applying this method to the Grundy series leads to the result $\frac{1}{2}$.

Thus, the study of the Grundy series demonstrates that mathematics, despite all its rigor, can be subject to different interpretations depending on the chosen approaches. The Grandi series does not have a specific amount in the traditional sense.

Excerpt from the publication: "A monk mathematician finds the divine in a paradoxical series of numbers"21:49 / August 16, 2024 Source Securitylab.ru

Readers familiar with the Schrodinger's Cat paradox are not surprised by such quantum uncertainty. This is another example of the connection between arithmetic (in this case, we can talk about ways to separate numbers due to associative

rules) and quantum mechanics.

19 Summing up

For physicists, a look at the cube is enough to understand the proof of Fermat's Last Theorem. Let's go to the right side of the equation: $a^n = c^n - b^n$ and imagine the construction in n -dimensional space corresponding to this expression. On the left you see a hypercube of dimension n , a symmetric figure. On the right you see a set of layers of dimension one less. This set will be asymmetric or will have an irrecoverable symmetry defect or a violation of the continuity of the layers for dimension $n > 2$, because elements of dimension from 1 to $n-1$ belong to a layer (use the rule [triangle inequality](#)). It is impossible to describe the same construction as an object in such a contradictory way. There is a conflict in the properties of dimensionality, continuity or symmetry. Therefore, such a construction does not exist in nature!

It turned out that very simple tools were all we needed: constructions in the form of an ordinary wooden cube for children's creativity, a globe, a chess set, a tape recorder on reels, a stencil, a right-angled triangle to prove Fermat's Theorem in a way that was understandable even to the blind. It is enough to feel with your fingers the faces, the edges of the cube or the meridian on the globe, concentrating on symmetry and maintaining the dimensions of the figures compared. These simple tools also allow us to infer the asymmetry of our universe! Look at the faces of beautiful women and notice that man, a child of the universe, must be slightly asymmetrical to be beautiful. Is this by chance?

The Riemann hypothesis and statistical physics

1 Introduction	202
2 The Infinity of Non- Trivial Zeros	203
3 Statistical Weight and Density of States . . .	209
4 Algebra and Symmetry	214
5 Symmetry. Groups. Characters	216
6 Partition function and statistical weight . . .	219
7 Orthogonality. Separation. p -Number	223
8 Quantum Nature of p -Numbers theorem .	229
9 RH for school	234

1 Introduction

The Riemann hypothesis [RH](#) is regarded as one of the most significant unsolved mathematical problems in the field. In this manuscript, author considers a proof of the [RH](#) concerning the so-called [non-trivial zeros](#) of the zeta function. The Riemann zeta function occupies a pivotal role in the realm of analytic number theory, with its applications extending to the domains of theoretical physics, probability theory, and mathematical statistics. The author is convinced that the [RH](#) should be verified from the standpoint of physics, quantum mechanics, reference to the Standard Model of the Universe, symmetry and algebra. In the contemporary era, fundamental knowledge of these subjects is imparted in educational institutions. Prime numbers can be considered a mathematical model of the possibility of separateness of a subsystem within a system. Despite the fact that the formulae delineating the zeta function and its properties are somewhat cumbersome and necessitate a grasp of higher mathematics, the theory of analytic functions, and number theory, the proof's fundamental premise is predicated on the principles of physics, mathematics, and logic that are typically covered in school.

With a focus on a broad readership, including high school students, the italics marks [special terms](#) that can easily be found in the scientific literature. The interdisciplinary nature of the study and the conflict in the notation used, such as p - probability and p - momentum, p - prime number, prompted the author to declare at the beginning of each section the main local variables, functions, in order to convey in what sense their use is meant.

The most characteristic property of the Riemann $\zeta(s)$ function, which can be written by two formulas. The first one is an

infinite sum [Dirichlet series](#) of the form:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1.1)$$

where is meant the convergence of the series for s (the question of convergence is discussed below), and n runs through all natural numbers. The second formula defines a $\zeta(s)$ function as an infinite series of products:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} \dots\right) \quad (1.2)$$

in this formula, p runs through all the primes. (In the case of a convergent series (1.1), it is easy to consider its partial sums, apply the associative law, and perform arithmetic operations on prime numbers, discarding low-order terms). Euler proved [\[Cha74\]](#) that both definitions are equivalent for the case of integers s .

[\[Cha74\]](#): Chandrasekharan (1974), Introduction to Analytic Number Theory

As an analytical function of the argument of the - complex variable $s = \sigma + it$, $\zeta(s)$ was first studied by Riemann [\[Rie48\]](#). It turned out that $\zeta(s)$ can be extended analytically to the entire complex plane $\mathbb{C}$, including negative values of σ , and has no features on it other than $s = \frac{1}{2} + it$ (first-order poles). $\zeta(s) = 0$ turns to zero in the range $(-2, -4, -6 \dots)$ negative values σ - these are the so-called [trivial zeros](#). Of particular scientific interest is the search for [non-trivial](#) zeros of the $\zeta(s)$ - function. The [RH](#) states that all nontrivial zeros of $\zeta(s)$ are located on the imaginary axis $s = \frac{1}{2} + it$.

[\[Rie48\]](#): Riemann (1948), «Collected Papers»

2 The Infinity of Non-Trivial Zeros

In this section, Γ denotes the mathematical Gamma function; $\psi(x)$, χ , and Ξ are functions specially defined by Riemann to simplify expressions; and T is an interval for the variable t along the imaginary axis on $\mathbb{C}$.

A function $f(z)$ of a complex variable z which is single-valued in this domain and which has a finite derivative at every point. Such function that can be locally represented by power series.

[Tit86]: Titchmarsh (1986), The theory of the Riemann zeta-function

The following functional equation holds [Tit86], whose form may initially appear overly complex:

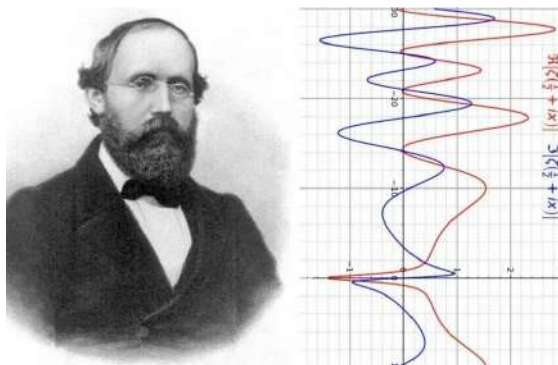
$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s) \quad (2.1)$$

due to the use of the [Euler gamma function](#) in the form familiar to modern readers, as refined by Legendre:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (2.2)$$

This integral is easily evaluated by parts and reduces to an integral of a similar form — ultimately yielding the recurrence relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Рис. 2.1: Georg Friedrich Bernhard Riemann. German mathematician who made profound contributions to analysis, number theory, and differential geometry. To the right - *zeta* function



from under the summation sign yields:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)}{\pi^{s/2}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{s/2}} \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2 \pi x} dx = \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

Here, the interchange of summation and integration is permissible due to the absolute convergence of the series. Riemann isolates the function

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} \quad (2.6)$$

and simplifies the expression:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx, \quad \sigma > 1. \quad (2.7)$$

From 2.6, using the known formula for the [Gaussian integral](#) $\int_0^{\infty} e^{-ky^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}$, we derive:

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ 2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right\}. \quad (2.8)$$

Titchmarsh deduced from the last formula that there is a connection between the derivative and the function itself [\[Tit86\]](#), which is easy to see directly by simplifying the expressions obtained during differentiation by replacing the variable with its values $x = 1$:

[\[Tit86\]](#): Titchmarsh (1986), The theory of the Riemann zeta-function

$$4\psi'(1) + \psi(1) = -\frac{1}{2} \quad (2.9)$$

So from 2.7 and 2.8 follows the formula:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)}{\pi^{s/2}} &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right\} dx + \int_1^{\infty} \psi(x) dx \quad (2.10) \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{-\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(x) dx \end{aligned}$$

Riemann drew attention to the symmetry of the occurrence of the factors s and $s-1$ in the resulting formula, from which he concluded that the zeros ζ should be located symmetrically relative to the axis $\sigma = \frac{1}{2}$ on $\mathbb{C}$. From the obtained formulas 2.8 and 2.9 by replacing $s = \frac{1}{2} + it$ Bernhard Riemann easily obtained the expression:

$$\Xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \ln(x)\right) dx \quad (2.11)$$

Also to simplify working with the expression 2.1 Riemann specifically introduced the function $\chi(s)$ according to the expression $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$.

$$\chi = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \quad (2.12)$$

Therefore, $\chi(s)\chi(1-s) = 1$. According to the formulas 2.1, 2.12 above, if you put:

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad (2.13)$$

then you can output a symmetric expression for the function:

$$\xi(s) = \xi(1-s) \quad (2.14)$$

Riemann then replaced the variable by rotating the axes of the plane $\mathbb{C}$ by an angle of $\frac{\pi}{4}$:

$$\Xi(z) = \xi\left(\frac{1}{2} + iz\right) \quad (2.15)$$

[Rie48]: Riemann (1948),
«Collected Papers»

Thus, the functional equation 2.1 is equivalent to the statement about [parity of the function \$\Xi\(z\)\$](#) . In Chapter XI [\[Rie48\]](#) [On the number of primes not exceeding this value](#) Riemann concludes that the function ξ can vanish only if the imaginary part of t is enclosed between $-\frac{i}{2}$ and $\frac{i}{2}$, and the number of roots of the equation whose real part is enclosed between 0 and T is approximately equal to:

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \quad (2.16)$$

Riemann writes: [‘the specified limits contain approximately the same number of valid roots; therefore, it is very likely](#)

that all the roots are valid. In any case, it would have been desirable to find a rigorous proof of the second proposition; after several futile, not very persistent attempts to find one, I temporarily abandoned them, since it was not necessary for the immediate purpose of my research'. Based on the biography of Riemann [Der09], it is natural to assume that Riemann made many persistent attempts to prove the Hypothesis formulated by him, but based on the level of development of physics in the middle of the XIX century, it was impossible to prove it.

[Der09]: Derbyshire (2009), Prime obsession: Bernhard Riemann and the greatest unsolved problem in mathematics

Riemann's conclusion also confirms Titchmarsh by analyzing the following integral [Tit86]:

[Tit86]: Titchmarsh (1986), The theory of the Riemann zeta-function

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \operatorname{ch}(\alpha t) dt = \frac{(-1)^n \pi \cos \frac{\pi}{8}}{2^{2n}} \quad (2.17)$$

where $n = (0, 1, 2 \dots N)$ has as many zeros as the sequence $(-1)^n$ for sufficiently large $a = a(N)$ and sufficiently close $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}$. Therefore, on the interval $(0, a)$, the function $\Xi(t)$ has at least N variables of the sign. By directing $N \rightarrow \infty$, Riemann concluded that the number of non-trivial zeros is infinite.

Thus, the RH states that all non-trivial zeros of $\zeta(s)$ are located on the imaginary axis $s = \frac{1}{2} + it$. But no one has yet succeeded in confirming or refuting this statement, despite the persistent efforts of mathematicians using supercomputers and distributed computing. Algorithm found Odlyzhko-Schoenhage for calculating the Riemann zeta function up to 10^{20} (The 10²⁰-th zero of the Riemann zeta function and 175 million of its neighbors) see. also [OS88].

[OS88]: Odlyzko и др. (1988), «Fast algorithms for multiple evaluations of the Riemann zeta function»

It is not difficult to derive [Kub07] the formula for the propagator of free particle motion:

[Kub07]: Kubo (2007), «Statistical Mechanics: A Modern Course with Problems and Solutions»

$$K(r, r', t) = \frac{m}{2\pi i \hbar t} \exp \left\{ -\frac{m}{2i \hbar t} (r - r')^2 \right\} \quad (2.18)$$

It is easy to trace the analogy of the propagator with the formula for determining the so-called $\psi(\frac{1}{x})$ -function introduced by Riemann 2.6, where you can set $r' = 0$, $r = n$, $t = x$. This analogy may seem artificial at first glance, but it will be explained more fully in the next section.

The Green's function and propagator are based on the principle of linearity of the influence of independent factors, superposition

of forces, and fields. For the case of a quasi- classical approximation, a function is substituted into the Schrödinger equations but with the addition of a complex term as the root of the [probability density](#) ρ to the phase $\frac{\hbar}{i} \ln(\sqrt{\rho})$ and further expansion of the phase in a series with respect to the degree of the [Planck constant](#) $\hbar$:

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(r)\right) \\ S &= S_0 + \hbar S_1 + \frac{\hbar^2}{2} S_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Substituting 2.19 in the Schrödinger equation and equating the terms with the same powers $\hbar$, it is easy to derive the equation for a wave packet with a given propagation direction, calculate its amplitude through the pulse $p(x)$ as in the classical case using the formula for amplitude of wave function: $A(x, t) = \frac{\text{const}}{\sqrt{p(x)}}$ and the phase exactly up to the multiplier $\frac{i}{\hbar}$ equal to the classical action.

It is interesting to note that from a mathematical point of view, the quasilassical approximation described by in solving problems of quantum mechanics (1926) [WKB Wentzel, Kramers, Brillouin](#) and is a variant of the [stationary phase method](#). Based on WKB, an alternative formulation of quantum theory is developed [Feynman path integral method](#) [Tak08], which consists in summing the contributions from all trajectories with the exponent weight $\exp\left\{i\frac{S}{\hbar}\right\}$, where S - [classic action](#) along this path. The classical ~~textit~~principle of least action selects from the family of [virtual trajectories](#) one that satisfies the classical equation of motion.

The analogy between the propagator 2.18 and Riemann's $\Psi(x)$ 2.6 function merits closer examination. Meanwhile, since the formulation of the [RH](#) in 1859, important discoveries have been made in physics, repeatedly confirmed by experiments. And this knowledge will help you find a proof of the [RH](#).

[Tak08]: Takhtajan (2008), Quantum mechanics for mathematicians Graduate Studies in Mathematics vol 95 (Providence, RI: American Mathematical Society)

Definition 2.1

[Osi06]: Osipov (2006), The Russian Academy of Sciences, 2006 Update

According to [Osi06] [Verification](#) (from Latin. [verificatio](#) – proof, confirmation, from Latin. [verus](#) – true and [facio](#) – to do) is a concept used in epistemology, logic and methodology of science to refer to [the processes of establishing the truth of scientific statements as a result of their empirical verification](#).

Such verification is possible by setting up a physical experiment, observing the phenomenon, measuring and interacting the observation instrument with the object under study.

Although it may be of scientific interest to build mathematical models for which there are no analogues in the known physical world [Vin03], but in this paper the Riemann hypothesis will be proved to the contrary: if the nontrivial zeros $\zeta(s)$ were located outside the imaginary axis $s = \frac{1}{2} + it$, then this would contradict the fundamental laws of physics, quantum mechanics, the axioms of arithmetic, abstract algebra.

[Vin03]: Vinberg (2003), A course in algebra

3 Statistical Weight and Density of States

Hereinafter Γ denotes the statistical weight in physics. A linear operator is denoted by A . Eigenfunction ψ . N - the number of particles (or another micro object). T - temperature. (Further in the text, the temperature T is set in energy units and the Boltzmann constant k_B is lowered, as is customary in the traditions of theoretical physics $k_B T \rightarrow T$, 1 electron volt = 11606 degrees. Similarly, the Boltzmann constant is omitted below in the formulas for expressing entropy S).

Everything said in this manuscript about the Lebesgue space $\mathcal{L}_2(G)$ is transferred to the Lebesgue space **with weight** $\mathcal{L}_2(G; \rho_0)$. Definition of $\langle f, g \rangle_{\rho_0}$:

$$\langle f, g \rangle_{\rho_0} = \int_G \rho_0(x) f(x) g(x)^* dx \quad (3.1)$$

where $\rho_0 \in C(\bar{G})$ and $\rho_0(x) > 0$, $x \in G$, $f, g \in \mathcal{L}_2(G; \rho_0)$ (Further, for simplicity, weight $\rho_0 = 1$ is omitted below and in the formulas, but the conclusions regarding orthonormal functions can be extended to $\forall \rho_0(x) > 0$, $x \in G$, as can be easily seen by replacing the variables [Vla]). In the space of measurable functions for which the integral of the square of the module is finite $\int \|f(x)\|^2 dx < \infty$ - in the Lebesgue space $\mathcal{L}_2$, consider the equation system of the linear operator. Suppose that in the studied system, a physical quantity A is observed. From a microscopic perspective, A is a dynamical quantity and a function of microscopic variables. In classical

[Vla]: Vladimirov (), Equations of mathematical physics

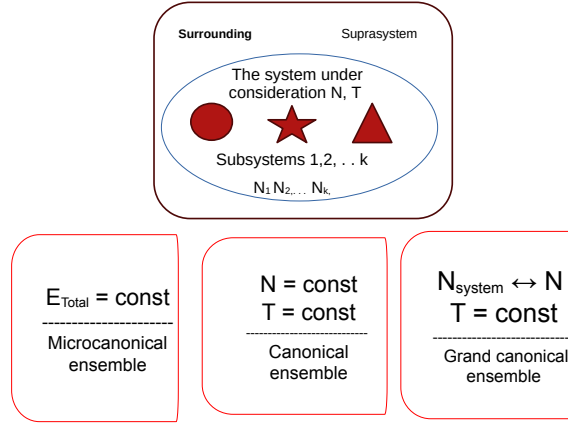


Рис. 3.2: The system refers to a specific part of the universe that is being observed. A thermodynamic system is a part of matter with a defined boundary on which we concentrate our attention.

mechanics, the microscopic value of an observable is defined by a function of generalized coordinates of the phase point,

$$A(l) = \int \phi^* A \phi d\tau = \langle l | A | l \rangle \quad (3.2)$$

[Mes14]: Messiah (2014),
Quantum mechanics

while in quantum mechanics, the average value of such an observable is expressed as follows [Mes14]:

$$A\psi_a = a\psi_a, \quad \langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{i,j} \\ \langle A \rangle = \frac{\langle \Psi, A\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle}. \quad (3.3)$$

where the proper functions of ψ_a are **linearly independent**, and the eigenvalues of the linear operator A are set over the field $\mathbb{C}$. The last formula in 3.3 evaluate a as the average value of the observed A in the dynamical state ψ_A , it is assumed that the norm $\|A\| < \infty$.

Every **orthonormal system** $\{\psi_k\}$ consists of linearly independent functions, i.e., for $\forall c_k$ with $\sum_k |c_k| \neq 0$, it is impossible to have $\sum_k c_k \psi_k \equiv 0$. Eigenfunctions $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$ can be transformed into a set of orthonormal functions via the **Gram-Schmidt orthogonalization** process. For these functions, $\forall f(x)$ can be expanded into a Fourier series:

$$c_k = \langle f, \psi_k \rangle \quad f = \sum_k c_k \psi_k = \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k \quad (3.4)$$

The **Parseval-Steklov equality** holds for an orthonormal

system $\{\psi_k\}$ that is complete in $\mathcal{L}_2$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2 = |f|^2 \quad (3.5)$$

Each point in a given region of phase space evolves over time according to the equations of motion of the mechanical system. Consequently, the entire region evolves as well. The distribution function remains constant along the phase trajectory of the subsystem. In the quasi-classical case, where quantum mechanical laws can be replaced by Hamilton's equations (a reformulation of the well-known Newtonian equations from school mechanics), we consider the following differential:

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi\hbar)^s} \quad (3.6)$$

The quantity $\Delta\Gamma$ is called the [statistical weight](#) of a microscopic state of the subsystem, and its logarithm is the entropy [\[LL02\]](#) (the [discreteness of phase space](#) $\Delta\Gamma$ estimated as formula $\sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^s}$ due to [Heisenberg's indeterminacy principle](#)).

Define the [probability density](#) ρ of finding a particle near a point $\mathbf{r}$ as:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (3.7)$$

and write the normalization condition over the entire manifold $\mathcal{M}$:

$$\sum_{\mathcal{M}} \rho(\bar{E}) \Delta q \Delta p = 1 \quad (3.8)$$

The number of quantum states with energy $\bar{E} \in (E, E + \delta E)$ is denoted as $d\Gamma$ (R. Kubo uses the notation [\[Kub07\]](#) $\Omega_0 \rightarrow \Gamma, \Omega \rightarrow \Delta\Gamma$, which is deemed unsuitable in Russian literature in physics due to the letter Ω traditionally denoting the [thermodynamic potential](#)).

Entropy is defined as the average (denoted by $\langle \rangle$) logarithm of $\Delta\Gamma$, both for quantum states via the energy probability distribution $w(E_i)$ and in the quasi-classical approach via the probability density ρ :

$$\begin{aligned} S &= -\langle \ln w(E_i) \rangle = -\sum_i w_i \ln(w_i) \\ S &= -\langle \ln [(2\pi\hbar)^s \rho] \rangle = -\int \rho \cdot \ln [(2\pi\hbar)^s \rho] dp dq \end{aligned} \quad (3.9)$$

[\[LL02\]](#): Landau и др. (2002), Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics

Heisenberg uncertainty principle states that there is a limit to the precision with which certain pairs of physical properties, such as position and momentum, can be simultaneously known. $dp dq > \frac{1}{2}\hbar$

[\[Kub07\]](#): Kubo (2007), «Statistical Mechanics: A Modern Course with Problems and Solutions»

Entropy defined this way (for quasi-classical case the lower formula) , like the statistical weight itself, is dimensionless. The **Planck constant** $\hbar$ in the last formula is crucial for defining entropy in classical statistics. By introducing $\hbar$, the entropy in the classical case becomes independent of the choice of measurement units.

[Vin03]: Vinberg (2003), A course in algebra

The simplicity of formula 3.6 belies the complexity of calculating the statistical weight. The statistical weight is closely tied to the system's symmetry and irreducible group representations, which generally obey **tensor product** rules [Vin03].

Let the manifold $\mathcal{M}$ be the set of all possible microscopic states of the system under given macroscopic conditions Fig. 3.2. In the classical case, $\mathcal{M}$ is a subspace of phase space; in quantum mechanics, it is the set of quantum states. The probability of realizing these microscopic states is determined by the probability that a state lies within the phase space volume element $\Delta\Gamma$:

$$\begin{aligned} Pr(\Delta\Gamma) &= \int_{\Delta\Gamma \subset \mathcal{M}} w(q, p) d\Gamma \\ Pr(l) &= w(l), \quad (l \in \mathcal{M}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

[Kub07]: Kubo (2007), «Statistical Mechanics: A Modern Course with Problems and Solutions»

(where Pr abbreviates **Probability**). The formulas apply to classical and quantum cases, respectively [Kub07]. Choosing a reference frame with a stationary centre of mass (total momentum and angular momentum zero), express the statistical weight via energy as:

$$\Delta\Gamma = \frac{d\Gamma(E)}{dE} \Delta E \quad (3.11)$$

Here, $\Delta\Gamma(E)$ denotes the number of quantum states with energy E' in $E \leq E' \leq E + \delta E$. The quantity $\Delta\Gamma$ is the **statistical weight** of the system's microscopic state, and its logarithm S is the entropy.

The energy probability distribution is given by:

$$W(E) = \frac{d\Gamma(E)}{dE} w(E). \quad (3.12)$$

Integrating over all subsystem probabilities forms a **complete group of events**, leading to the normalization condition for

$W(E)$:

$$\int_{\mathcal{M}} W(E) dE = 1 \quad (3.13)$$

$$\sum_l W \Delta \Gamma = \sum_{i=1}^k \sum_l W_{i,l} \Delta \Gamma_{i,l} = 1$$

For the classical and quantum mechanical cases respectively, where in the lower formula summation is performed over quantum states l grouped by each subsystem $1, 2 \dots k$ within the studied system. Recall that the manifold $\mathcal{M}$ represents the collection of all possible microscopic states the system can occupy under given macroscopic conditions, with quantum number l enumerating the discrete set of quantum states.

The total number of microstates Γ is a function of the system's energy E , particle number N , volume V , and some parameter X such as electromagnetic/gravitational field strength:

$$\Gamma(E, N, V, X) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3(N_a+N_b+N_c\dots)} N_a! N_b! N_c! \dots} \int_{H \leq E} d\Gamma$$

$$\Gamma(E, N, V, X) = \sum_{0 < E_l < E} 1 \quad (3.14)$$

for classical and quantum mechanical cases respectively. In both formulas, the manifold $\mathcal{M}$ in phase space and eigenvalues of H (the system's Hamiltonian) are considered for the energy range $E < H < E + \delta E$.

Note that in quantum mechanics, identical particles are indistinguishable - this [permutation symmetry of identical particles](#). Therefore, the result of phase space integration is divided by the number of permutations from combinatorial formulas, explaining the appearance of factors like $N_a! N_b! N_c! \dots$ in the denominator. By introducing $\hbar$, Γ in the classical case becomes independent of the choice of measurement units (compare with 3.9).

Let us express the differential of the probability distribution function in phase space and the probability density ρ to find the object at given phase space coordinates through the

evident formula:

$$dw = \rho(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s) dp dq = e^{-\frac{E(p,q)}{T}} dp dq \quad (3.15)$$

- the probability to find the studied object within infinitesimal intervals of s coordinates and s momenta: $q_i \dots q_i + dq_i, p_i \dots p_i + dp_i$, abbreviated in formula 3.15 and hereafter as $dp dq$, considered as a [differential of phase space](#). Here, the probability density is expressed through the system's energy $\rho = e^{-\frac{E(p,q)}{T}}$.

Again, significantly simplifying the presentation while avoiding the general case of tensor products of symmetry group representations (discussed later), let's consider a closed system as a whole (i.e., isolated from other systems, e.g., placed in a thermostat), where $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3 \dots$ are defined as statistical weights of its various subsystems. If each of k subsystems composing the studied system can be in one of $\Delta\Gamma_\alpha$ states, then phase volumes multiply while corresponding [entropies](#) add, as illustrated by:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma &= \prod_{\alpha} \Delta\Gamma_{\alpha} \\ S &= \sum_{\alpha} S_{\alpha} \end{aligned} \quad (3.16)$$

In other words, the phase space function is [multiplicative](#) and allows [separation of variables](#) across subsystems within the studied system.

The [additivity](#) property is crucial for entropy (along with other thermodynamic variables: energy, particle number, enthalpy, free energy, thermodynamic potential). Thus, the phase space is discrete 3.6 and is a multiplicative function of generalized coordinates. Here, the principles of phase volume [multiplicativity](#) 3.16 and entropy [additivity](#) hold.

4 Algebra and Symmetry

As in classical mechanics, the presence of [integrals of motion](#) is closely related to the symmetry of a quantum-mechanical system. Suppose the system is [invariant](#) under some transformation $\hat{U}$, where only unitary transformations preserving vector norms and the Hermiticity of operators have physical meaning. Since the system's dynamics are determined by its [Hamiltonian](#),

the invariance property implies that under such a transformation, H satisfies:

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{-1} = \hat{H} \quad (4.1)$$

(For classical mechanics, [Poisson brackets](#) are analogously applicable.) In other words, the operator $\hat{U}$ commutes with the Hamiltonian $\hat{H}$, and their [commutator](#) vanishes:

$$[\hat{U}, \hat{H}] = \hat{U}\hat{H} - \hat{H}\hat{U} = 0 \quad (4.2)$$

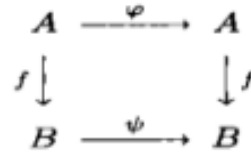
If the operator $\hat{U}$ does not explicitly depend on time, it must correspond to a conservation law. Then, the eigenvector Ψ_E of the Hamiltonian $\hat{H}$, with definite energy E , transforms under $\hat{U}$ into a vector Ψ'_E possessing the same energy: $\Psi'_E = \hat{U}\Psi_E$. Each [transformation group](#) 5 is associated with a certain of [conservation laws](#). Whenever a conserved observable has a classical counterpart, these conservation laws are identical to the corresponding classical laws. The most common ones are listed below:

1. Translational invariance and conservation of total momentum.
A necessary and sufficient condition for the invariance of the Hamiltonian with respect to translations is its invariance with respect to infinitesimal translations;
2. Invariance with respect to rotations and conservation of angular momentum;
3. Reflection invariance and parity conservation. From the invariance of the Hamiltonian with respect to reflections at the point $[\hat{H}, \hat{S}_0] = 0$, it follows that the parity of S_0 is the integral of motion.
4. Permutation invariance and symmetry conservation. In a system consisting of identical particles, the Hamiltonian of invariance under any permutation P of these particles $[\hat{H}, \hat{S}_0] = 0$ for all P . $\implies$ that $\forall$ [observable](#) (quantity), in quantum physics, constructed from P , is the integral of motion.

To construct a consistent mathematical model, a coherent algebra can be established via homomorphic relations.

Definition 4.1. A mapping f from an algebra A to an algebra B is called a homomorphism if it is linear and preserves the multiplication operation, i.e., $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$ for any $x, y \in A$ Fig. 4.3. The image $Im f$ of the homomorphism f is a subalgebra of the algebra B and its kernel $Ker f$ is an ideal of the algebra A .

Рис. 4.3: A group homomorphism is a function that translates one group operation into another, preserving the law of element composition.



5 Symmetry. Groups. Characters

The term 'transformation group' is conventionally applied to a set of transformations that, in conjunction with any two transformations, encompasses the transformation resulting from their sequential execution. Moreover, each transformation within the group is required to contain the inverse transformation. All representations are considered over the field $\mathbb{C}$, which is an algebraically closed field.

Definition 4.1

Abelian group — a group in which the operation is commutative: $\forall g_1, g_2 \in G$ we have $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

A **representation of a group** is a **homomorphism** of the group into a group of linear operators on the vector space. If the representation is **irreducible**, it cannot be decomposed into a direct sum of smaller representations.

Representation dimension — the dimension of the vector space on which the representation operators operate.

Let be in the space of R^m is a representation of D of a finite group G . If there is a subspace in the space $R^m \subset R^k$ (where $(0 < k < m)$) is invariant under all transformations of D , then the representation is called **reducible** - t. e. $\forall x \in R^k$ result of $D(x) \in R^k$. If an invariant subspace cannot be separated in the R^m space, then the representation is called **irreducible**. If the space R^m is decomposed into invariant subspaces, each of which implements an **irreducible representation**, then the representation of D is called **completely reducible**.

Lemma 1. If a reducible representation D is unitary, then the orthogonal complement of the subspace R^k which we denote by R^{m-k} is also invariant under the transformations D . The selection of the first basis k elements as the first and m basis

elements as the last m elements, respectively, of the subspaces R^k and $R^{(m-k)}$, results in the attainment of a block-diagonal form of the representation matrix D . To illustrate this let $\{v_1, \dots, v_k\}$ be a basis for R^k and $\{v_{k+1}, \dots, v_m\}$ be a basis for R^{m-k} . The combined basis $\{v_1, \dots, v_m\}$ transforms D into block-diagonal form:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \quad \forall g \in G \quad (5.1)$$

where D_1 acts on R^k and D_2 on R^{m-k} .

For an irreducible representation, any operator that commutes with all representation operators must be **scalar** of the form cE , where c is a number.

Schur's lemmas

Below are Schur's lemmas from which the orthogonality relation matrix elements of the unitary representation:

1. The matrix M commuting with all matrices of an irreducible representation is a multiple of E - unit: $MD(g) = D(g)M \implies Mx = c x$ (M is a scalar t. e. multiplying E by a number c).
2. Let $D^{(1)}(g)$ and $D^{(2)}(g)$ are matrices of two irreducible, nonequivalent representations of the group G of order n_1 and n_2 , respectively. Then any rectangular matrix M with n_1 columns and n_2 rows satisfying the relation $MD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)M$ for $\forall g \in G$, must be a null matrix.

In the case of irreducible unitary representations $D^{(i)}$, $D^{(j)}$ of order n_i and n_j , respectively, for the group G with m elements from the first and second groups **Schur's lemmas** implies **orthogonality relation** for matrix elements.

The following calculation will determine the **character of a group representation** - complex value function $\chi(ab) \neq 0$ and as $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$. This is defined as the function $\chi(g)$ that is applied to the group in question, with the purpose of returning the trace of the matrix for the element under study g in the representation:

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{i=m} D_{ii}(g) = \text{tr}(D) \quad (5.2)$$

[PTC09]: Petrashen и др. (2009), «Applications of Group Theory in Quantum Mechanics»

Properties of group representation characters [PTC09]:

- Equivalent representations have identical characters $\chi(D) = \chi(V)^{-1}(D)V(g)$, since the matrix trace is invariant under similarity transformations.
- The characters of representation matrices corresponding to elements of the same conjugacy class in group G coincide. Characters are constant on conjugacy classes.
- Characters of irreducible representations satisfy the orthogonality property:

$$\sum_{g \in G} \chi^i(g) \overline{\chi^j(g)} = m \delta_{i,j} \quad (5.3)$$

- The character $\chi(g)$ of a completely reducible representation D equals the sum of the characters of all irreducible representations into which it can be decomposed. The decomposition into irreducible representations is **unique** up to equivalence:

$$\chi(g) = \sum_j r_j \chi^{(j)}(g) \quad r_j = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \overline{\chi}(g) \chi^{(j)}(g) \quad (5.4)$$

Here, the number r_j counts how many times the irreducible representation $D^{(j)}$ appears in the decomposition of the reducible representation D . This is symbolically expressed via the formula (analogous to decomposing a reducible representation into **components** of irreducible representations):

$$G \cong \bigoplus_j r_j G^{(j)} \quad (5.5)$$

[PTC09]: Petrashen и др. (2009), «Applications of Group Theory in Quantum Mechanics»

The $\oplus$ symbol denotes not matrix addition but the decomposition into irreducible representations. [PTC09]

A representation of D is reducible if there exists a nonsingular matrix V such that, by a similarity transformation, the representation matrix is that $V^{-1}DV$ takes a block-diagonal form 5.1, where each block corresponds to an irreducible representation of D .

In physics, the Clebsch–Gordan (CG) coefficients are numbers that arise in angular momentum coupling in quantum mechanics. They appear as the expansion coefficients of total angular momentum eigenstates in an uncoupled tensor product basis.

The decomposition of the composition of reducible representations $D^{(i)} \otimes D^{(j)}$ into irreducible ones can be achieved using **Clebsch-Gordan coefficients** :

$$D^{(i)}(g) \otimes D^{(j)}(g) = \sum_l \gamma_{i,j,l} D^{(l)}(g), \quad (5.6)$$

If $V^{(i)}$ is a representation of some symmetry group (for example, a unitary group G acting on $\mathbb{R}^m$), then according to the general theory of representations of compact or semisimple groups, it can be decomposed into a direct sum of irreducible representations:

$$V_i = \bigoplus_j r_{i,j} W_j, \quad (5.7)$$

where W_j are irreducible representations, and $r_{i,j}$ are their multiplicities.

When G is a tensor product of representations:

$$G = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cdots \otimes V_k \quad (5.8)$$

its decomposition into irreducible components V_j corresponds to the isolation of symmetric subspaces (for example, the total angular momentum in a system of spins). If V_i decomposes into components as in 5.7, then G further decomposes according to the formula:

$$G = \bigotimes_{j=1}^k \left(\bigoplus_i r_{i,j} W_j \right) = \bigoplus_{j_1, j_2, \dots, j_k} (r_{1j_1} \cdots r_{kj_k}) (W_{j_1} \otimes \cdots \otimes W_{j_k}). \quad (5.9)$$

The interrelation is determined by the rules of representation composition, which in turn depend on the specific symmetry group. It is evident that the fundamental principles of algebra are rooted in the realms of physics and symmetry.

6 Partition function and statistical weight

The density matrix of the [canonical Gibbs distribution](#) is found by the formula:

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta \hat{H}} \quad \left(\beta = \frac{1}{T} \right). \quad (6.1)$$

where T is the temperature of the system under study regarded as unified parameter for the system and all subsystems. Let $\phi'_E = |E\rangle'$ be the eigenvector for eigenvalue E' of the Hamiltonian $\hat{H}$ and $\mathcal{H}|E'\rangle = E'|E'\rangle$ then for a canonical

T is the temperature of the system under study regarded as unified parameter for the system 3.2 and all subsystems.

ensemble that is classical and discrete, the canonical **partition function** is defined as:

$$Z(\beta) = \text{tr}(\underline{Z}(\beta)) = \text{tr} e^{-\beta \mathcal{H}} = \sum_{E'} e^{-\beta E'} \quad (6.2)$$

In the following text, the notation $Z - \text{sum}$ will be used to denote the value of the sum of the specified series.

Infinite sparse matrix

Simultaneously, the scalar partition function can be regarded a trace of **infinite sparse matrix** $\underline{Z}$, that is to say, a matrix with finite support. $Z - \text{sum}$ corresponds to the summation of probabilities for all microstates for a given value of the energy interval, the condition that the sum of probabilities for **full group of events** is equal to unity, and is derived from the normalization condition similar to the one given 3.13.figure

The partition function is included in the Gibbs distribution as a normalization factor (it does not depend on j , ensuring that the probability sum is equal to unity:

$$\sum_j P_j = \frac{1}{Z} \sum_j e^{-\beta E_j} = \frac{1}{Z} Z = 1. \quad (6.3)$$

If a system having a volume of V and containing $N = N_a + N_b + N_c \dots$ particles is in equilibrium with a thermostat at a temperature of T (in the quasi-stationary case, the subsystems forming one system under consideration have the same temperature and β), then the probability of its microscopic states is determined by the following expressions:

$$Pr(d\Gamma) = e^{-\beta \mathcal{H}_N} \frac{d\Gamma}{Z_N} \quad (6.4)$$

a partition function:

$$Z_N = \frac{1}{\prod_{a,b,c,\dots} N_a! N_b! N_c! \dots, (2\pi\hbar)^{3N_a}} \int e^{-\beta \mathcal{H}_N} d\Gamma \quad (6.5)$$

Appearance of multipliers of the form $N_a!N_b!N_c!\dots$, in the denominator follows from combinatorics and is caused by permutation symmetry 4, the need to avoid re-counting microstates of the phase space.

The Boltzmann and Maxwell distributions are special cases of the canonical Gibbs distribution. In consideration of the molecular identity of gas molecules, it is sufficient to analyse the distribution by considering the phase space of a single molecule. Furthermore, the energy can be expressed in the momentum representation in the coordinates dp . Furthermore, integration over the generalized coordinates dq of the system can be replaced by simple multiplication by the volume of the vessel. This greatly facilitates the calculation of.

It is important to remember that the statistical weight $\Delta\Gamma$ satisfies the relation for quasi-stationary thermodynamic systems:

$$\Delta\Gamma \geq 0, \quad \lim_{E \rightarrow \infty} \Delta\Gamma(E) e^{-\alpha E} = 0 \quad (\alpha > 0) \quad (6.6)$$

To find the statistical weight of the system under study I + II, consisting of subsystems I, II, use convolution operations of statistical weights:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{I+II}(E) &= \int \Delta\Gamma_I(E') \Delta\Gamma_{II}(E - E') dE' \\ &= \int \Delta\Gamma_I(E - E'') \Delta\Gamma_{II}(E'') dE''. \end{aligned} \quad (6.7)$$

A close look at the last formula allows us to conclude that Z - sum (partition function) for a canonical ensemble is determined by the Laplace transform from its statistical weight:

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int_{E_0}^{\infty} e^{-\beta E} \Delta\Gamma(E) dE = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta' - i\infty}^{\beta' + i\infty} Z(\beta) e^{\beta E} d\beta \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\beta' + i\beta'') e^{(\beta' + i\beta'')E} d\beta'', \quad (\beta' > 0). \end{aligned}$$

where E_0 is the lowest level of the system. The lower formulas are finding the statistical weight $\Delta\Gamma(E)$ by the

inverse Laplace transform of Z -sum. The integral is easily evaluated using the calculus of residues by considering the residues along the contour in the plane $\beta \in \mathbb{C}$ formed by a vertical straight line $\beta = \beta'$ and closed by a semicircle arc on ∞ .

Formula 6.7 corresponds to the product of Z – *sums*:

$$Z(\beta)_{\text{I}+\text{II}} = Z(\beta)_{\text{I}} \cdot Z(\beta)_{\text{II}} \quad (6.8)$$

The expression of the Hamiltonian of the system under study, which combines k subsystems, will now be considered. The Hamiltonian is thus expressed as: $\hat{H}_{\text{Total}} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \dots \hat{H}_k$. Furthermore by employing an arbitrary definition of the zero potential energy level, it is possible to consider all energy levels for examination:

- $E \geq 0$ (the minimum energy value for the oscillator due to the uncertainty principle is $\frac{1}{2}\hbar\omega$);
- by virtue of $\|\hat{H}_{\text{Total}}\| < \infty$ being finite and quantization of energy being integer, the appropriate unit of energy measurement must be chosen so that $\Delta E = 1$;
- is an ordered (or **partially ordered set** in the case of multiple eigenvalues) in ascending order $0 \leq E_0 \leq E_2 \dots \leq E_m$.

It is evident that among the set of eigenvalues of the Hamiltonian of the system under consideration, multiple eigenvalues of E_n can occur, as well as spaces from the series of natural numbers $\mathbb{N}$. The employment of a **diagonal matrix**, U with real coefficients $u_{n,n} = \frac{n}{E_n}$ (and $\frac{E_n}{n}$ for U^{-1}) facilitates the transition to an orthonormal basis.

Corollary 5.1 Equidistant energy level It can thus be concluded, without loss of generality, that the eigenvalues of the arbitrary Hamiltonian of the system under consideration can be regarded as equidistant energy levels: $|1\rangle, |2\rangle, |2\rangle \dots |m\rangle$. The ket notation i was employed to denote the eigenvalues of the Hamiltonian (energy E_n). These were expressed as a series of consecutive natural numbers within the interval $1 \dots m$.

In the quasi-stationary state, the total energy of the system under consideration is conserved, so the set $\{E_m\}$ is closed by the addition/subtraction operation. From the point of view

of physics, operations associated with transitions between energy levels can be considered as a single operation $\circ$. For example operators [birth](#) and [annihilation](#), widely used in quantum mechanics, including the study of harmonic oscillators. The destruction operator (usually denoted by $\hat{a}$ reduces the number of particles in a given state by one. The birth operator (usually denoted by $\hat{a}^\dagger$ increases the number of particles in a given state by one, it is conjugate to the destruction operator. It is possible to formulate a [random function](#) from two arguments, $f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$, and to consider such a function as one operation $\circ$ in the group. $\{E_m\}$.

However, prior to this, it is necessary to consider in greater detail the basic information from group theory in relation to the partition function, and to define the concept of a normalized partition function.

Definition 5.1. We say that $\langle S \rangle$ is a [subgroup generated by S](#) in particular, if S consists of just one element g then $\langle S \rangle = \langle g \rangle$ is a cyclic subgroup generated by the element g .

Note: an element g^k of the cyclic group $G = \langle g \rangle$ is [generating](#) $\langle g \rangle$ if and only if $\gcd(k, n) = 1$.

Definition 5.2. For any subset $S \subseteq A$, the set of all linear combinations $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n$ ($a_i \in S, k_i \in \mathbb{Z}$) is the smallest subgroup of A containing S . It is called the [subgroup generated by S](#) and denoted $\langle S \rangle$. If $\langle S \rangle = A$, the group A is said to be generated by S , and S is termed a [generating set](#) of A .

Note: If the order of a group $\text{ord}(G) = p$ - prime number then the group G contains exactly p elements: $G = \langle g \rangle = \{e, g, g^2, g^3, \dots, g^{p-1}\}$, where e identity element of G so $\forall g_n \quad e g_n = g_n$. G is a cyclic group generated by the element g_n .

7 Orthogonality. Separation. p-Number

In this section, $\gcd(p, q)$, when applied to numbers, denotes the [greatest common divisor](#) of p and q .

Partition function Z_i is a series of terms $e^{-j\beta E_i} = \frac{1}{p_i}$ becomes a (finite/infinite) cyclic subgroup of G generated by $\langle g \rangle$ ($g = \frac{1}{p}$), with each microstate constructed from elements of the group generated by prime numbers.

In the canonical ensemble, normalization of the density matrix already involves dividing by the partition function Z 6.3. However, the group structure will require additional normalization of the Z -sums themselves:

$$\tilde{Z}(\beta) = \frac{Z(\beta)}{Z_0(\beta)} \quad (7.1)$$

where $Z_0(\beta)$ is the partition function of the reference system (for example, a system with $d\Gamma_0(E) = \delta(E)$ and $Z_0(\beta) = 1$ - ground state. Why is the delta function of energy chosen as the reference system for normalized $\tilde{Z}(\beta)$ -sums? - Because from the definition of the [delta function](#) introduced by Paul Dirak:

$$Z_0(\beta) = \int_{E_0}^{\infty} \delta(E) e^{-\beta E} dE = e^{-\beta \cdot 0} = 1 \quad (7.2)$$

Axioms of groups of $\{\tilde{Z}\}$

Checking the axioms of groups of normalized statistical sums:

1. The product of normalized $\tilde{Z}$ - sums must correspond to the convolution of statistical weights (6.7). This is true because $\tilde{Z}(\beta)_{I+II} = \tilde{Z}(\beta)_I \cdot \tilde{Z}(\beta)_{II}$ (6.8).
2. The neutral element is $\tilde{Z}_0(\beta)$ corresponding to the system $d\Gamma(E) = \delta(E)$
3. $\exists$ inverse element $\forall \tilde{Z}_n(\beta) \exists \tilde{Z}_n(\beta)^{-1}$, such that: $\tilde{Z}_n(\beta) \cdot \tilde{Z}_n(\beta)^{-1} = 1$

[Vin03]: Vinberg (2003), A course in algebra

Lemma 6.1: A ring $\mathbb{Z}_n$ is a field only if n is a prime number [Vin03].

In an orthonormal system, the statistical weights corresponding to different microstates $\Delta\Gamma_i$ and $\Delta\Gamma_j$ are independent, and the corresponding distribution functions X_i and X_j are also

independent. Consider the [characteristic functions](#) introduced by Russian mathematician A.M. Lapunov [Gmu68] $\xi(t)$ of these quantities, which are the Laplace transform. Let us verify that $\{\xi\}$ also forms a group under multiplication.

The characteristic function for x_k where parameters k - is the mean (expected value) of x_k and σ is the [standard deviation](#), and σ^2 is the [variance](#) of x_k :

$$\xi_k(t) = M [e^{itx_k}] = e^{ikt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad (7.3)$$

Normalized characteristic functions obtained by dividing by Z_0 :

$$\tilde{\xi}_k = \frac{\xi_k}{\xi_0} = \frac{e^{ikt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}} = e^{ikt} \quad (7.4)$$

The group structure $\{\tilde{\xi}_k\}_{k=0}^{p-1}$ consists of functions of the form e^{ikt} and forms a group under multiplication. The axioms of the group were examined by analogy 7.

Lemma 6.2 Orthogonality and coprimality lemma

In a quasi-closed and quasi-stationary system under study $\{\phi_i\} \in \mathcal{L}_2(G; \rho)$ $\{E_i\}$ to perform the orthogonality relation $\langle \psi_{E_p}, \psi_{E_q} \rangle = \delta_{p,q}$ the condition must be met:

$gcd(e^{\beta E_p}, e^{\beta E_q}) = 1, \quad p \neq q$ i. e. It is imperative that both p and q are coprime.

Proof of this lemma from the inverse of.

In the orthonormal system, due to the orthogonality of wavefunctions 3.3 corresponding to distinct eigenvalues, the statistical weights $\Delta \Gamma_i$ and $\Delta \Gamma_j$ of different microstates are [independent random variables](#). As shown for partition function and statistical weight 6, assuming equidistant energy levels $\implies p = e^{\beta E_p} \quad q = e^{\beta E_q} \quad (\beta = \frac{1}{T}, \text{ where } T \text{ is the temperature of the system under study regarded as unified parameter for the system and all subsystems}),$ from the independence of microstates determined by the energy level 3.14 and definition of partition function 6.2, it follows that the same microstate as function of energy level l should be unique and not repeated in the Z-sum series. As the cyclic group

[Gmu68]: Gmurman (1968), Fundamentals of probability theory and mathematical statistics Translated by Scripta Technica Ltd

It follows that the same microstate as function of energy level l should be unique and not repeated in the Z -sum series

[Vla]: Vladimirov (), Equations of mathematical physics

[LL02]: Landau и др. (2002), Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics

generated by $\langle g \rangle = \frac{1}{p}$. If $p \neq q$ it can be deduced that for $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $(p^m, q^n) = 1 \implies$ the uniqueness of the microstate as a function of energy is defined.

In the event of $\exists t = gcd(p, q) > 1 \implies$ there will be a double repetition of the number of microstates $gcd(p^m, q^n) = t^{min(m, n)}$ generated by $\langle g_1 \rangle = \frac{1}{q} \implies$ the definition of the statistical weight will be violated.

The Laplace transform is a linear operator $Lu = F$ with the domain $\mathcal{M}_L$. We denote with $\mathcal{R}_L$ - the range of values of the L operator. The [inverse Laplace transform](#) is found via the inverse linear operator $u = L^{-1}F$. It is easy to prove that the systems of functions $\{\psi_k\}$ and $\{L\psi_k\}$ [simultaneously linearly independent](#) §1 [Vla] $\implies$ normalized $\tilde{Z}(\beta)_m, \tilde{Z}(\beta)_n$ $m \neq n$ partition function as images of random variables, must be generated based on coprime numbers $gcd(e^{\beta E_m}, e^{\beta E_n}) = 1$ $m \neq n$. The lemma has been proven. $\square$.

The statistical weight Γ is subject to fluctuations according to the normal law [LL02]. This can be taken into account by introducing [random matrices](#):

- Let $\hat{H}$ be the Hamiltonian of the system, and its energy levels $\{E_i\}$ are random (as in the theory of random matrices).
- Then the density of states $\rho(E)$ can be described by a [Gaussian ensemble](#).

According to the [central limit theorem](#) for the group G if the fluctuations are small, then $\ln \tilde{Z}$ will be distributed normally. This allows you to apply a lognormal distribution for $\tilde{Z}$. For a more detailed exposition, see appendix 4.

Corollary of the proved Lemma 6.2 Coprime numbers provide the property of group representation characters 5.

The following investigation will consider a diagonal matrix of energies. In the model under consideration, each E_i is repeated according to a multiple of r_i . This matrix representation can be generalized by considering the algebra of operators over the Hilbert space of the system:

$$\hat{E} = (E_1 \dots E_1, E_2 \dots E_2, E_3 \dots E_3 \dots) \quad (7.5)$$

In consideration of the linearity of the Schrödinger equation, the joint consideration of subsystems in the system under consideration corresponds to the operation of combining sets of eigenvalues. In the event of projectors P_{E_i} being introduced into subspaces with energy E_n , the partition function referred to as equation 6.2 is to be written as follows:

For a more detailed exposition, see below in the Goldbach-Euler conjecture 2

$$Z_n(\beta) = \text{tr}(\underline{Z}) = \text{tr}(e^{-\beta\mathcal{H}}) = \sum_i^{\infty} r_i e^{-\beta E_n} \quad (7.6)$$

The partition function Z_n as a (finite/infinite) cyclic group G generated by the element $e^{-\beta E_n}$. The validity of this assertion is contingent upon the mathematical model under consideration; within the domain of physics, discrete energy ΔE and statistical weight $\Delta\Gamma$, systems characterised by infinite E_{Total} , entropy S_{Total} and phase space $\Delta\Gamma = e^S$ (see 3.9) are deemed to be nonexistent. It can thus be concluded that the upper limit in the last formula is $i \leq N < \infty$, where $N \in \mathbb{N}$.

Definition 6.1. An (additive) Abelian group A is said to decompose into a direct sum of subgroups $A_1, A_2 \dots A_k$ if every element $a \in A$ can be uniquely expressed as $a = a_1 + a_2 \dots a_k$, where $a_i \in A_i$. In this case, we write:

$$A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus A_k \quad (7.7)$$

The direct sum of (additive) abelian groups $A_1, A_2 \dots A_k$ is an abelian group $A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus A_k$, consisting of all sequences $a = a_1 + a_2 \dots a_k$, where $a_i \in A_i$, with the component-wise addition operation. For example, $\mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}_2 \cdots \oplus \mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}^k$. Note that if the groups $A_1, A_2 \dots A_k$ are finite, then $|A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus A_k| = |A_1| |A_2| \dots |A_k|$. For the case of two subgroups A_1, A_2 the uniqueness of the representation $a = a_1 + a_2$ is equivalent to condition $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. It is possible to apply this definition to the introduced operator $\hat{E}$ of the system under consideration 7.5.

In the context of multiplicative Abelian groups 5.8, direct multiplication is the preferred method. In the event of a composite representation of groups, the following equation is to be considered: $A_1 \otimes A_2 \cdots \otimes A_k$.

The last definition may be applied to the statistical weight Γ of the the system under consideration.

If two systems are isomorphically equivalent, it means that they are structurally analogous, and there is a well-defined bijective mapping f that shows this:

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow G \quad m \mapsto g^m \quad f : \mathbb{Z}_k \rightarrow G \quad [m] \mapsto g^m \quad (7.8)$$

for infinite and finite groups, respectively, where $[m]$ denotes the residue class ($\text{mod } \Gamma$).

It has been demonstrated that $\tilde{Z}_n(\beta)$ is isomorphically equivalent to projector of introduced energy operator $P_{E_i} \hat{E} = P_{E_i} \hat{H}$, where $\hat{H}$ - hamiltonian of the system under consideration 7.5. This result is consistent with the findings of 7.8.

Without altering the generality linearly independent quasi-stationary functions orthonormal system $\{\psi_k\}$ is possible through the group generating element by the formula, containing the amplitude, phase multiplier and oscillation part:

$$\psi_m^n = \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp\left(\frac{i2\pi n}{p_m}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Delta E m t\right), \quad i = \sqrt{-1} \quad (7.9)$$

where t - time, $\hbar$ - Planck constant, $\Delta E = 1$ according to corollary 5.1 Equidistant energy level. The appropriate diagonal matrix will be expressed as follows: $\underline{Z} = \langle g \rangle$:

$$\begin{aligned} Z_m(\beta) &= \text{tr}(\underline{Z}), \quad \underline{Z} = \langle g \rangle = \frac{1}{p} = \text{diag} \{e, g, \dots, g^{p-1} \dots\} \\ g &= \frac{1}{p_i}, \quad p_i = e^{\beta E_i} \\ \underline{Z} &= \{(e, g, \dots, g^{p-1})(1 + g^p + g^{2p} + g^{3p} \dots)\} \\ &\quad (7.10) \end{aligned}$$

From a formal point of view, the formula can be interpreted as a series generating an arbitrarily large (infinite) number of microstates. Nevertheless, as a consequence of the effective selection of the basis for the system of orthonormal functions, it is possible to restrict the calculation of the average to the number of microstates that is equal to the order of the cyclic subgroup i.e p . The average value of any of observable is expressed by the formula 3.3. This series is absolutely convergent for case $Z - \text{sums}$ have been normalised. 7.1.

It is sufficient to produce a cyclic subgroup $\underline{F} \subset \underline{Z}$ of order p . According to [Lagrange's](#) theorem if $\underline{F}$ is a subgroup of a group $\underline{Z}$, then $|\underline{Z}| = [\underline{Z} : \underline{F}] \cdot |\underline{F}|$. The total number of Γ microstates can be divisible by p with the remainder $\Gamma = ap + b$, $b < p \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Gamma}{p} = a$ microstates. This can be achieved by continuing the $Z - sum$ series to remainder elements or discarding as negligible. It can be demonstrated that, given the series of partition functions absolutely convergent with respect to the [D'Alembert feature](#), the sum of the series can be calculated with ease. Approximate computational methods constitute a prevalent approach within the domain of quantum mechanics. As A. Messiah writes: [Practically none of the physical systems can be studied without using a suitable approximate method](#) [[Mes14](#)].

[[Mes14](#)]: Messiah (2014),
Quantum mechanics

As a consequence of the selection of the basis previously examined, the calculation of the mean value of the observables can be considerably streamlined. This is evident in expression 3.3, where the average mean of observable is calculated over a finite number of microstates generated by element $\langle g \rangle$ of cyclic groups $\underline{Z}$. Furthermore, the application of orthogonality with a weight 3.1 calculated according to the elementary rules of infinitive geometric progression with a real denominator (because $g^p = e$) is employed.

According to Definition 5.2 the group $\tilde{Z}$ is said to be generated by set of inverse element to prime numbers 7.10.

The aforementioned measures enable us to ensure the consistency of the proposed mathematical model with the fundamental theorems of abstract algebra.

8 Quantum Nature of p -Numbers theorem

In this section, $gcd(p, q)$, when applied to numbers, denotes the [greatest common divisor](#) of p and q . $\phi(a)$ denotes Euler's totient function — the number of integers coprime to a not exceeding a . Specifically, for $a = p^\alpha$ (where p is prime), $\phi(p) = p-1$, and for $x = \phi(p^\alpha)$, we have $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = a \left(1 - \frac{1}{p}\right)$. For the general case, $\phi(a) = \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$, where $p | a$ denotes all prime divisors of a .

Considering 3.4 and the fact that the product $c_i c_i^*$ represents the probability of the system having energy E_i , we conclude that the eigenvalues of the operator equations correspond to the coefficients c_i and c_i^* in the superposition of stationary solutions to the Schrödinger equation $\Psi(q, t)$.

Definition 7.1 p -primitive Abelian group (where p is a fixed prime number) is an Abelian group $(A, +)$ such that the order of any element in A is a power of p . $(\mathbb{Z}_{p^n}, +)$ is an additive group of residue classes modulo p^n .

The decomposition of an Abelian group into a direct product of cyclic functions follows from the [theorem on the structure of finite Abelian groups](#). Any finite Abelian group can be it is decomposed into a direct sum of its cyclic subgroups whose orders are powers of the primes. Multiplicative notation does not change the essence of the decomposition — it is only an alternative way to denote the group operation.

It is important to consider equation 3.4, in conjunction with the observation that the product $c_i c_i^*$ represents the probability of the system having energy E_i . It is concluded that the eigenvalues of the operator equations are congruent with the coefficients c_i and c_i^* in the superposition of stationary solutions to the Schrödinger equation, denoted by $\Psi(q, t)$.

Theorem 7.1 Quantum Nature of p -Numbers

For $\forall$ complete orthonormal systems $\{\psi_k\} \in \mathcal{L}_2$ (corresponding to a quasi-closed system with a discrete energy spectrum of its Hamiltonian H), $\exists$ a basis in canonical variables such that the main diagonal of the corresponding statistical matrix in the energy representation contains roots equal to the mutual prime numbers: $\langle \bar{\psi}_n^*, \bar{\psi}_n \rangle = \frac{1}{p_n}$, where $p_n = e^{\beta E_n}$, $\beta = \frac{1}{T}$ (the inverse of absolute temperature in energy units. It is proposed that this parameter may be regarded as a unifying factor for all systems under consideration), and E_n is the eigenvalue of the Hamiltonian $\hat{H}\bar{\psi}_n = E_n\bar{\psi}_n$, with $\bar{\psi}_n(q)$ being the Fourier harmonic coefficient. The multiplicity of each root corresponds to the degeneracy of the system's energy levels. Different eigenfunctions $\bar{\psi}_n$ correspond to distinct primes p_n , and the normalization

condition $\langle \bar{\psi}_m^*, \bar{\psi}_n \rangle = p_m \delta_{m,n}$ corresponds to the coprimality condition $\gcd(p_m, p_n) = 1$.

Proof: According to orthogonality and mutual simplicity lemma 7: $\tilde{Z} = \langle g \rangle$, where $g_i = \frac{1}{p_i}$ for a specific energy value $p_i = e^{\beta E_i}$ and each E_i is repeated according to a multiple of r_m and $\tilde{Z}(\beta m)$ is isomorphically equivalent to projector of introduced operator $P_{E_i} \hat{H}$ 7.5. and normalised partition function $\tilde{Z}(\beta)$ is a character of Abelian cyclic energy group $G = \mathbb{Z}_{E_{\text{Total}}}$. Let $n = E_{\text{Total}}$ then additive group of residue classes modulo denoted as $\mathbb{Z}_n$ (here $\mathbb{Z}$ - whole numbers set):

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, [2]_n, \dots, [n-1]_n\} \quad (8.1)$$

(where $n = E_{\text{Total}}$) are the residue classes *mod* n . According to the coprimality lemma 7, among all residue classes, we are only interested in the reduced residue classes $[k]_n$ such that $\gcd(k, n) = 1$. Under this coprimality condition, the usual algebraic operations are possible.

As previously stated, the system 7.9 of functions orthonormal with respect to the basis given by equation 7.10 is related to the following matrix (probability density $|\Psi|^2 = \sum_{\mu, \nu} c_\mu^* \cdot c_\nu \psi_\mu^* \psi_\nu$), represented by $\underline{Z}^{(m)} = \langle g_m \rangle$, contain the diagonal elements $z_{n,n}^{(m)}$, as defined by the following formula for the energy level $E_m = \Delta E m$:

$$g_{(m)}^n = \left(\frac{1}{\sqrt{p_m}} \right)^2 \exp \left(\frac{i 2 \pi n}{p_m} \right) \exp(-\Delta E m) = \frac{1}{p} \quad i = \sqrt{-1} \quad (8.2)$$

where image part of 7.9 is reduced, for energy should apply to apply a lognormal distribution 7.3 and 7.4. According to the [central limit theorem](#) for the group G if the fluctuations are small, then $\ln \tilde{Z}$ will be distributed normally. This is the fundamental principle behind proving the ABC hypothesis [\[Avd25\]](#).

Note: in the previously selected basis 7.9, each energy value, even without taking into account degeneracy, is repeated p_m times. This does not change the average value for calculating the observable and simplifies working with the statistical matrix.

For $\forall a = p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j} p_k^{\alpha_k} \dots$ and $a \leq N$ if $\forall i, j \quad \gcd(p_i, p_j) = 1$, $\implies \forall i, k \quad \gcd(p_i, p_k) = 1$ i.e. the relation of coprimality of

The theorem can be formulated purely in terms of linear operators with bounded discrete spectral measures of finitely supported square-integrable functions. However, such a formulation would be more abstract and less intuitive, as the author believes the mathematical postulates are rooted in principles of statistical physics.

[\[Avd25\]](#): Avdyev (2025), Fermat's Last Theorem and the ABC hypothesis in School XXI. Prime numbers as the metalanguage of the universe.

[\[Cha74\]](#): Chandrasekharan (1974), Introduction to Analytic Number Theory

a number is [reflexive](#) and [transitive](#) $\implies$ if in a sequence of natural numbers $p_1, p_2, p_3 \dots \leq N$, all numbers are pairwise prime $\gcd(p_i, p_j)$ (coprime), $\implies$ every number in the sequence $\forall p_i \in a = p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j} p_k^{\alpha_k} \dots \quad a \leq N$ is prime.

The sequence of prime numbers (inverse values) generate $\{\tilde{Z}(\beta)\}$ corresponds to a complete orthonormal system of wave functions that are solutions to the Schrödinger equation. Multiple repetitions of eigenvalues are possible, up to arbitrarily large values.

$$\Gamma = \prod_{n=1}^{n=k} \tilde{Z}_k(\beta)^{\alpha_k} \quad (8.3)$$

(This formula has the same structure as the fundamental theorem of arithmetic because the homomorphism relation is described above. At the same time, the ring of whole numbers $\mathbb{Z}$ is not isomorphic to the group of characteristic functions $\tilde{Z}$. To do this, any integer would have to be invertible.). As a result, an orthonormal system of functions is formed in the Lebesgue space with weight. It is sufficient to calculate average value for observable only for first elements cyclic group generated by the element 7.10 and extrapolate result for all microstate.

According to [Fredholm's theorems](#) I, II for the specified statistical matrix, there exists an isomorphic system of algebraic equations where the eigenvalues are prime numbers repeated on the diagonal while accounting for degeneracy multiplicity.

Considering that the probability density is proportional to the square of the wave function amplitude $\forall$ wave function $\{\Psi_n\} \in \mathcal{L}_2$ can be expressed as a function of the probability density $|\Psi|^2 = \sum_{m,n} c_m^* \cdot c_n \psi_m^* \psi_n$, $\sqrt{\rho} = p^{\frac{1}{2}}$ and phase S as an imaginary number, i.e., the exponent in the ζ -function containing nontrivial zeros $s = \frac{1}{2} + it$. The squared modulus of the characteristic number $|\mu_i|^2 = \frac{1}{p}$ for the [Fredholm integral equation](#) (for example propagator of free particle motion 2.18) is squared modulus of the eigenvalue $|\lambda_i|^2 = p$ of the operator $\hat{E}$ 7.5 where p is a prime number. This matrix representation can be generalized by considering the algebra of operators over the Hilbert space of the system. The statistical weight is derived from the determinant of this matrix $\det \hat{E}$ - [characteristic polynomial](#):

$$\det \hat{E} = (\lambda - E_i)^{r_i} \quad (8.4)$$

Note: In the model under consideration, each E_i is repeated according to a multiple of r_i .

It can thus be concluded that the aforementioned result for the case of a cyclic group of prime order can be extended to a group of arbitrary order by employing the Euler totient function of the statistical weight of the system under study, denoted by $\phi(\Gamma)$. $\square$. For large values, the coefficient $\frac{\phi(\Gamma)}{\Gamma}$ tends to 1. [Chebyshev functions](#) and formula of entropy, but it is fundamentally important for the conclusions obtained in this study $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n)}{n} = 1$ [[Cha74](#)]. For further information, please refer to the Appendix 4.

From a formal point of view, the ζ function is defined as a product of the form 8.3 for the case of all $\tilde{Z}$ raised to all possible powers of. The ζ function has been identified as a universal scale and a normalizer. This can be compared to an infinitely marked-up field where microstates can potentially be placed.

Thus, a prime number is associated with probability, with a specific microcanonical state, and with the energy of a subsystem in the system under study. The additive properties of energy, entropy, and particle numbers in subsystems forming a studied system are, in fact, manifestations of symmetry phenomena.

Since the considered system of orthonormal functions in Hilbert space for $\forall$ solutions of the Schrödinger equation is complete, the above reasoning implies that other solutions beyond this orthonormal system contradict the Parseval–Steklov equality.

This means that the nontrivial zeros of the ζ -function located outside the line $s = \frac{1}{2} + it$ on $\mathbb{C}$ cannot model material objects in the universe. The assumption of the existence of nontrivial zeros beyond this line leads to an [aporia](#).

Mathematical theorems must undergo empirical verification. A logically consistent statement that does not correspond to any object in nature is false (aporia). Such an assumption cannot be verified or empirically tested. [Aporia](#) (from Greek $\alpha\pi\omicron\rho\nu\alpha$ — [impasse, hopeless situation](#)) is a fictitious, logically valid scenario (statement, proposition, or conclusion) that cannot exist in reality.

Therefore, the Riemann Hypothesis is proven. $\square$

Fundamental theorem of arithmetic: every integer greater than 1 is prime or can be represented uniquely as a product of prime numbers, up to the order of the factors [[Cha74](#)]

9 RH for school

[Cha74]: Chandrasekharan
(1974), Introduction to Analytic
Number Theory

In order to comprehend the fundamental premise of the proof of RH, students are directed to consult the Planck's Quantum formula, which was discovered by Max Planck in 1900. The spectral energy density of a black body is an absolutely convergent series from a completely multiplicative function.

The present study hypothesises that radiation is studied not in a vacuum, but in a material medium. The condition that the gas is ideal is contingent upon a minor interaction with the substance. The existence of a minimal quantity of matter is a prerequisite for the existence of the phenomenon under consideration. The establishment of thermal equilibrium in the radiation field is of paramount importance. The total number of photons studied, denoted by N , is a variable that is determined from the thermal equilibrium conditions. It is evident that minimising the free energy of the gas, denoted by F , at a given temperature, T , and volume, V , results in the following necessary condition being obtained: $\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu = 0$, which means that the [chemical potential of the photon gas](#) is zero.) The Planck's formula is as follow:

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1}. \quad (9.1)$$

allows you to calculate the probability of detecting the energy of the corresponding harmonic ([overtone](#)) in the spectral decomposition over the entire spectrum. The series based on $f(n)$ converges absolutely (in our case, $\omega = \Delta\omega n$ $\Delta\omega = 1$ in appropriate scale).

The black radiation spectrum contains the entire wavelength range, beyond which there is no radiation, and there are no solutions to the Schrodinger equation for the quasi-stationary case. This is a visual interpretation of the completeness of the system of orthonormal functions.

The Planck's Quantum formula is a representation of a ζ -function in a complete system of orthonormal functions with weight as a multiplier $\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \cdot e^{\frac{\hbar\omega}{T}}$, and you can also match $p_i = e^{\frac{\hbar\omega_i}{T}} = e^{\beta E_i} \frac{1}{p_i} = e^{-\beta E_i} \implies$ similarity output ζ - functions of the expression of the spectral energy density of blackbody radiation up to the weight factor 3.1. The transition to

an orthonormal basis in the energy representation, taking into account the weight coefficients in the form of prime numbers, will ensure the complete identity of the Plunck's Quantum formula and ζ function definition formulas. If $f(x)$ - **completely multiplicative functions** and series $\sum_1^{\infty} f(n)$ converges absolutely, then the identity is true

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + f(p^3) \dots) = \prod_p (1 - f(p))^{-1} \quad (9.2)$$

As **complete multiplicative function** $f(ab) = f(a)f(b) \implies f(a) = 1$, we assume absolute convergence of a series of the form similar to just given Φ (the so-called **generating special arithmetic function**). The proof of this lemma is similar to the proof of equivalence of both definitions of the ζ - function 1.1 and 1.2

The formula of the **Dirichlet series** excludes repetitions in the radiation spectrum. The Euler's totient function $\phi(n)$ is

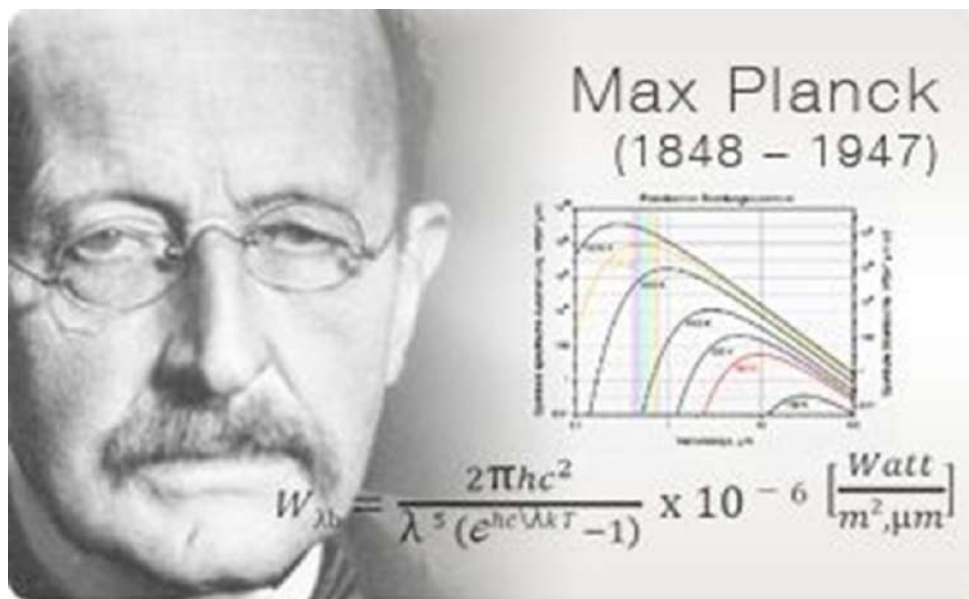


Рис. 9.4: Max Karl Ernst Ludwig Planck. He is known for the Planck constant, which is of foundational importance for quantum physics

to prevent the duplication of frequencies in the spectrum of black body radiation.

Note: $\phi(n)$ — the number of integers coprime to n not exceeding n is in agreement with the sequence 9.2 and excludes double frequency counting.

$\phi(\Delta\omega n) = \phi(n)$ $\Delta\omega = 1$ in
appropriate scale of frequency

At the same time, Planck's Quantum formula covers the entire spectrum of black body radiation, beyond which there are node Broglie waves. Due to the thermal equilibrium between matter and photons, due to the fact that the chemical potential of a photonic gas is zero, waves, particles - in a word, matter, there are no stars outside of this spectrum. In this case, the phase of the wave corresponds to the value of a nontrivial zero $s = \frac{1}{2} + it$. This represents the full spectrum of black body radiation and de Broglie waves, and hence the particle. $\implies$ ζ -function expresses the principle of equal probability of microcanonical states, which follows from the symmetry in the canonical Gibbs distribution. Zeros on the imaginary axis $s = \frac{1}{2}$ on $\mathbb{C}$ correspond to nodes of the wave function. Why just nodes? - The fact is that the formula implicitly uses Sommerfeld radiation conditions [Vla] to derive the Planck formula. These conditions are derived from the solution $u(x, t) = u(x)e^{i\omega t}$ Helmholtz equation as the eigenvalue problem for the Laplace operator. This conclusion may be compared to that of Riemann's, which asserted that the number of ζ -function non-trivial zeros is infinite 2.17. reducing complex phenomena to simpler ones.

The Goldbach conjecture from the eye of physicist

Goldbach-Euler conjecture from the eye of physicist

8

1 Holbach's conjecture

1 Holbach's conjecture	239
2 Proof	240

In 1742, the mathematician Christian Goldbach wrote to Leonhard Euler, proposing the theory that any odd number greater than five could be expressed as the sum of three prime numbers. Euler's research into this problem led him to formulate a stronger hypothesis: that any even number greater than two can be expressed as the sum of two prime numbers.

The former is known as the 'ternary Goldbach's conjecture', while the latter is referred to as the 'binary Goldbach's conjecture' or 'Euler's conjecture'. The crux of the issue is as follows: *It can be demonstrated that any even number, commencing from four, can be expressed as the sum of two prime numbers.*



Рис. 1.1: Christian Goldbach is a Prussian and Russian mathematician; full member, first conference secretary and Advisor to the Academy of Sciences and Arts, Privy Councilor.

This statement remains an open question in mathematics and as of 2025 has not been proven.

Combined with the [RH](#), Goldbach's conjecture is included in [Hilbert's list of problems at number eight](#).

Рис. 1.2: Leonard Euler - Swiss, Prussian, and Russian mathematician and mechanic who made fundamental contributions to the development of these sciences. Along with Lagrange, he is the greatest mathematician of the 18th century.



2 Proof

[Sad04]: Sadovnichy (2004), Theory of operators, Moscow: Drofa

By the Goldbach-Euler conjecture, we consider the subset of even natural numbers, i.e., N is composite. According to [Sad04] let G be a subspace of a Hilbert space H and F be its orthogonal complement, i.e., $H = G \oplus F$ or $F = H \ominus G$. This means that every vector $h \in H$ can be uniquely represented as $h = g + f$. The vector g is called the **projection** of h onto G . The operator defined on the entire Hilbert space H , which assigns to each vector $h \in H$ its projection onto the subspace G is called the **projection operator** onto G (**orthoprojector**) and is denoted by the symbol P_G , so that $g = Ph = P_G h$. The projection operator is obviously linear. Moreover its norm $\|P\| = 1$.

Properties of P :

$$\begin{aligned} P^2 h &= Ph & P^2 &= P \\ P^* &= P \end{aligned} \tag{2.1}$$

Note that if P is the projection operator onto G , then $E - P$, where E is the **identity operator**, is also a projection operator, and $E - P$ projects onto $H \ominus G$.

Indeed, $(E - P)^* = (E - P)$ and $(E - P)^2 = (E - P)$ and for any vector $h \in H$ we have $(E - P)h = h - g = f$ where $f \in H \ominus G$.

The product of two projection operators P_{G_1} and P_{G_2} is a projection operator if and only if they commute:

$$P_{G_1} P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1} \tag{2.2}$$

Subspaces G_1 and G_2 are orthogonal if and only if $P_{G_1}P_{G_2} = 0$.

Reformulating the problem helps you find a visual solution to the problem. Suppose two signals $f(t)$ and $g(t)$:

- belong to the Lebesgue space $\mathcal{L}_2(G)$ (i.e., square-integrable over their entire domain), be given. Their spectra $F(w)$ and $G(w)$ are defined via the Fourier transform [KW61].
- The signals $f(t)$ and $g(t)$ are **uncorrelated**. This means their **convolution** (scalar product) equals zero:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^t f(t)g^*(t - \tau) d\tau = 0 \quad (2.3)$$

(The Laplace transform is a variant of the Fourier transform, as can be shown via variable substitution [Mys72].)

From the Parseval-Steklov equality 3.5, if $f(t)$ and $g(t)$ are uncorrelated, their orthogonality $\langle f(t), g(t) \rangle = 0$ implies orthogonality of their spectra $\langle (F(w), G(w)) \rangle = 0$ in the frequency domain. Thus, these functions do not overlap in $\mathcal{L}_2(G)$. In other words, $H = \{\psi_k\}$ decomposes into a direct sum of invariant subspaces $H = G \oplus F$ (Lemma 1.5). $\implies$ Construct the subspace **spanned** by the vectors $\text{span}\{F, G\}$, where $F(t)$ and $G(t)$ become basis vectors Ψ_1, Ψ_2 . This can be achieved via the **Gram-Schmidt process**, resulting in $(\Psi_1, \Psi_2) = 0$, Fig. 2.3.

According to **Bertrand's postulate** $\exists$ prime $\frac{N}{2} \leq p < N$. So Ψ_1 one can regard as orthoprojector P_G and Ψ_2 as orthoprojector P_F and:

$$\Psi = P_G\Psi \oplus P_F\Psi = P_{\perp}\Psi \oplus P_{\parallel}\Psi \quad (2.4)$$

Because of $\{\psi_k\}$ is a complete orthonormal system of functions:

$$\text{span}\{H\} = \text{span}\{F\} \oplus \text{span}\{G\} \quad (2.5)$$

Calculate the volume of the phase space for the space H and the more accurate statistical weight is easier in terms of statistical physics with the application of the theorem on the

[KW61]: Kharkevich и др. (1961), Spectra and analysis

[Mys72]: Myshkis (1972), Introductory Mathematics for Engineers. Lectures in Higher Mathematics

Taking into account the isotropy of the Hilbert space the directions of the orthoprojectors $P_{\perp}$ and $P_{\parallel}$ are equivalent. Bertrand's postulate can be applied equally well to both parallel and perpendicular projections.

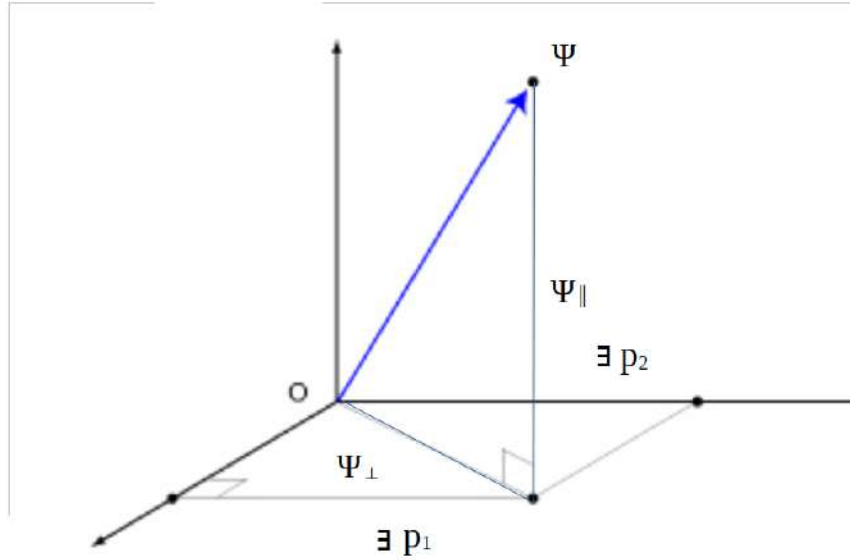


Рис. 2.3: For primes numbers result will be $p_1 + p_2$ - total numbers of microstates.

Quantum Nature of p -Numbers 8. From to the conditions of the Holbach-Euler theorem follows: N is composite number $\implies$ without changing the generality, we can regard the number N as the statistical weight Γ of an irreducible unitary representation of group of the symmetry of Ψ - the above mentioned solution of the Schrödinger equation. Indeed in terms of quantum mechanics without loss of generality, we associate N with the statistical weight Γ of a stationary thermodynamic system governed by the Schrödinger equation. Let $\{\psi_k\}$ be a complete orthonormal system of functions describing the combined spectrum $H(w)$, unifying $F(w)$ and $G(w)$. Thus, $\{\psi_k\}$ serves as a common basis 3.1 for $F(w)$ and $G(w)$. The complete orthonormal system $\{\psi_k\}$ allows any $\Psi \in \mathcal{L}_2(G)$ to be expanded via Fourier coefficients 3.4.

In the previously selected basis 7.9, each energy value, even without taking into account degeneracy, is repeated p_m times. This does not change the average value for calculating the observable and simplifies working with the statistical matrix. To calculate Γ it is necessary use formula :

$$\Gamma = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = p_1 + p_2 \quad (2.6)$$

For primes numbers result will be $p_1 + p_2$ - total numbers of microstates. Indeed: a cyclic group of prime order p is either trivial or the entire group. By Lagrange's theorem, the order of any subgroup must divide since p is prime, the only divisors are 1 and p .

This is intuitive: for uncorrelated signals, their phase spaces add rather than multiply. In the spectral domain (after Fourier/Laplace transforms), this means their energies (or powers) sum rather than interfere. From a quantum mechanics perspective, entanglement is absent. Hence:

In other words, via a unitary basis transformation preserving the scalar product, the phase space decomposes into a direct sum of subspaces. In this new basis, the original vectors $F(t)$, $G(t)$ become basis vectors Ψ_1, Ψ_2 . Since the subspace is invariant and closed under linear operations

Division yields at least two terms. This is why the minimal number of terms in the decomposition of any composite even number is two 3.5, which represents the statistical weight Γ of the complete system.

Thus, every even number greater than ≥ 4 can be expressed as the sum of two prime numbers. $\square$

The ABC conjecture from the perspective of physics

9 The ABC conjecture from the Eye of physicist

1	Formulations of ABC conjecture	246
2	The key idea of Prove	246
3	The Fundamental Theorem of Arithmetic	249
4	Microstate and macrostate of the system	251
5	Phase space. Probability distribution density	252
6	The quantum nature of prime numbers . .	253
7	Preservation of phase volume. Entropy . .	253
8	Radicals of the numbers A, B, C and phase space	256
9	Linear Spaces and Matrix Functions . .	261
10	Logarithm of the Matrix	264
11	Trace of matrices. Entropy	268
12	Arbitrary A, B, C and quantum mechanics	269
13	Analogies from ODE systems	270
14	Fluctuations	271
15	Prime numbers as the metalanguage of the Universe	281
16	The Riemann hypothesis and physics.	281
17	Summing up	282

1 Formulations of ABC conjecture

The ABC conjecture was formulated independently in number theory by the mathematicians David Masser in 1985 [1] and Joseph Esterle [2] in 1988. It is stated in terms of three positive whole a, b, c that are co-prime and satisfy $a + b = c$. The conjecture essentially states that the product of the distinct prime factors of ABC is usually not much smaller than C or $\max(a, b, c) < K_\epsilon \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon}$, where K_ϵ depend only on some positive ϵ - real number.

The *Rad* function is the radical of the numbers A,B and C equal to the product of the primes forming these numbers, but raised to the first power, i.e. $\text{Rad}(8) = \text{Rad}(2^3) = 2$, $\text{Rad}(1000000) = \text{Rad}(2^6 \cdot 5^6) = 30$. An equivalent formulation of the ABC conjecture includes the quality $q(a, b, c)$ of the triple which is defined as:

$$q(a, b, c) = \frac{\log(c)}{\log \text{Rad}(abc)} = \frac{\ln(c)}{\ln \text{Rad}(abc)} \quad (1.1)$$

For every positive real number ϵ , there exist only finitely many triples A, B,C, of co-prime positive integers with $A + B = C$ such that $q(a, b, c) > 1 + \epsilon$. Many hundreds of pages have been spent by eminent mathematicians in the Western world searching for proofs [3], and the process of searching for proofs continues.

2 The key idea of Prove

Let's look at an example of manufacturing a batch of factory products, for example, a wardrobe, where the width of each door is respectively: $A + B = C$ centimeters.

This is a reference value, but in practice, both [systematic](#) and [accidental](#) errors are possible. Let's say that thanks to product quality management, systematic errors have been

eliminated, but inevitable random errors remain due to uncontrolled factors.

Scientific search

The ABC hypothesis in number theory was formulated independently by mathematicians [MC85] David Masser in 1985 and Joseph Oesterle in 1988.

[MC85]: Masser и др. (1985), «Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory / W. W. L. Chen. — London:»

Suppose that the law of the distribution of the width of each door - independent random variables has the same standard deviation σ , and their mathematical expectations are respectively equal to $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$. From the basics of mathematical statistics ([Hud63]) we know, that the measurement error in the last formula is equal to: $\sim \frac{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2}}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{N}}$, where N is the number of batches of products used in the experiment - this is [sample size](#).

[Hud63]: Hudson (1963), Lectures on elementary statistics and probability

From this simple example we can proceed to the proof of the ABC conjecture.

The conjecture essentially states that the product of the distinct prime factors of ABC is usually not much smaller than C . It should be noted that $A + B = C$

Note that the lowercase letters here denote random variables.

To do this, it is necessary to apply the basic theory of arithmetic, move on to simple integer polynomials and linear maps, Jordan matrices and quantum mechanics. The algebras of all the above are in homomorphism relations. The same prime numbers taken from the $\text{Rad}(abc)$ chain play the role of the roots of an integer polynomial, the characteristic polynomial of a linear mapping matrix, the root vectors of a linear space decomposed into a direct sum of invariant subspaces, and the eigenvalues for the Hamiltonian operator of a quantum system.

Concentrate on the eigenvalues or roots and make sure that the average of the logarithm of the matrices (trace, main diagonal) does not change due to multiple roots - this is the entropy S . Since entropy is the same additive quantity as the number of particles and both quantities are so-called integrals of motion, we have: relative standard deviation $\sim \frac{1}{\sqrt{S}}$, where

S - entropy of the system under study. It remains to calculate $S = \frac{\ln \text{Rad}(abc)}{L}$, where L is the length of the main diagonal (non-zero elements) of the matrix and at the same time the

number of primes in the chain $\text{Rad}(abc)$. It corresponds to the statistical matrix of the system in Hilbert space, where the size of the matrix is infinite. When multiple roots appear, the probability of detecting a microobject in a given state is "smeared" along the main diagonal of the statistical matrix of system in according to degree of the roots (degeneration of energy level). This proves the theorem and allows us to evaluate the so-called quality of the triple $q(a, b, c)$, but in reality - a defect or fluctuation from above due to the restriction by a function with a normal distribution according to Chebyshev's theorem - we are talking about the entropy of the system under study. In short, even without knowing the function of the distribution of prime numbers $\pi(x)$, it is easy to make simple estimates. These estimates turn out to be sufficient to prove the ABC conjecture, the ABC hypothesis. The world is material, and the physics of the microcosm and the macrocosm are the same, the Correspondence Principle and the Heisenberg Uncertainty Principle have taken place. So prime numbers model a system consisting of subsystems that do not interact but are connected by a common resource - phase space. For example, we can talk about a mixture of ideal gases. For example, we can talk about a mixture of ideal gases. In the latter case, the vessel is also a common resource.

Therefore, even without knowing the distribution function of the primes $\pi(x)$, it is easy to make simple estimates. The estimates given are sufficient to prove the ABC hypothesis.

Moving from experiment, from applied mathematics, we have made fundamental generalizations. Why? - because the world is material, and the physics of the microcosm and the macrocosm are the same, the [principle of correspondence](#) of the text and [Heisenberg uncertainty principle](#) work. Thus, the primes model a system consisting of subsystems that do not interact, but are connected by a common resource - phase space. Unfortunately, a number of scientists identify the concept of interaction and communication, which is erroneous: [isolation is the absence of communication, but not just absence, but disconnection](#) - . In particular, we can talk about a mixture of ideal gases. In the latter case, the vessel is also a shared resource.

It is difficult to overestimate the place of prime numbers in the physical laws that define the surrounding material world and, in a broad sense, our universe. See the table It

is difficult to overestimate the place of prime numbers in the physical laws that define the surrounding material world and, in a broad sense, our universe. See table 14.1.

It is the prime numbers that make it possible to connect the system, the super-system and the sub-system [Avd24],

Meet Shinichi Mochizuki, a mathematician from Kyoto University [Moc21]

[Avd24]: Avdyev (2024), «How can a student prove the ABC hypothesis using prime numbers, quantum mechanics and creative imagination?»

[Moc21]: Mochizuki (2021), «Mochizuki's proof of ABC-conjecture.»

500 pages read by 10 people on Earth

The proof of VTF in 120-1140 pages. Andrew Wiles' pages are not the limit. The five hundred page proof of the ABC conjecture ABC hypothesis is the work of Japanese mathematician Shinichi Mochizuki, who studies number theory and arithmetic geometry at Kyoto University.

3 The Fundamental Theorem of Arithmetic

According to the basic theorem of arithmetic, each of the three numbers in the expression $a + b = c$ can be decomposed into simple factors, powers above one are allowed, but under the conditions of the ABC conjecture, repeated factors in this decomposition are excluded due to the lack of common divisors.

$$\begin{aligned} a + b = c &\iff a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k} * 1^{n-t} \\ &\quad + b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \dots b_l^{\beta_l} * 1^{n-u} \\ &= c_1^{\gamma_1} c_2^{\gamma_2} \dots c_m^{\gamma_m} * 1^{n-v} \quad (3.1) \end{aligned}$$

In order to obey the rules of dimensionality of elements in the space of integers, defined as the n-fold Cartesian product of the axis of integers $Z^n = Z * Z * \dots * Z$, each term in the space of integers has to be a term in $Z^n = Z * Z * \dots * Z$, each term in the above formula is also multiplied by a multiplier in the form of a 1^{n-t} elementary unit cube, so that each term has a dimension equal to the dimension of the Euclidean space n in which the manifolds of different dimensions under consideration are embedded. (From the analogy with the Lego constructor, you can try to move on to the axioms of

topology and the Euclid's Postulates.). In other words, the sums of the exponents of all multipliers in the formula above are equal to t, u, v respectively, which corresponds exactly to the dimension of the manifolds A, B, C :

$$\alpha_1 + \cdots \alpha_k = t, \beta_1 + \cdots \beta_l = u, \gamma_1 + \cdots \gamma_m = v \quad (3.2)$$

It is easy to understand the dimension of each member and the minimum required dimension $n = \max(t, u, v)$ (3.1) of the Euclidean space in which the studied cuboids can be embedded according to the given formula. The total number of prime factors of the above formula will be used below, it is equal to $L = k + l + m$.

Developing the technical approach adopted in the chapter 4, we compare the expression (3.1) with a set in the form of three manifolds, each in the form of a multidimensional parallelepiped or, in short, a cuboid in a finite-dimensional Euclidean space, with a given metric and measure, hereinafter referred to simply as Euclidean space.

$\exists$ a continuous invertible equivalence function f that maps each element as an elementary cube 1^n in Z^n of the sets A and B into C , i.e. $f(A, B) \rightarrow C$, which can also be expressed from a topological point of view by the homeomorphism condition of the following figures:

$$A \equiv C \setminus B \quad (3.3)$$

For $\exists f$, it is necessary to ensure the possibility of mutual reduction of layers of higher dimensions than two, as well as the reduction of the number of hyperplanes of symmetry to two (note that the operation of reduction, permutation, shift of $1^n \rightarrow 1^n$ is possible precisely in equivalence relations). The homogeneity of Euclidean space is postulated).

What physical phenomenon can the formula (3.1) correspond to? It models a certain system made up of subsystems that are not connected but share a common resource in a certain way. From the point of view of school knowledge, the laws of thermodynamics are of particular interest when looking for evidence for the ABC conjecture. A common resource can be vessel (for gas mixture), energy, phase space, entropy, number of particles and other integrals of motion.

4 Microstate and macrostate of the system

Consider a system consisting of a mixture of ideal gases whose molecules do not interact with each other. In particular, this gives rise to Dalton's Law, which states that the pressure of a mixture of chemically non-reacting gases is equal to the sum of the partial pressures of each of the gases - and this is clear because of the absence of intermolecular interaction.

The author proposes to consider the ABC conjecture from the perspective of the phase space of a thermodynamic system with $2s$ dimensions, along the coordinate axes of which the values of s generalised coordinates q and s impulses p of this system (s is the number of degrees of freedom) are stored in the Hamiltonian, known to a pupil of mechanics under the name of kinetic energy theorem. The operator form of the Hamiltonian in canonical form is quite beautiful, universal, described in the literature, but requires little experience in working with partial derivatives [Van03]. More precisely, the application of the statistical approach in physics requires knowledge of the basics of quantum mechanics [6-7], an understanding of the Heisenberg uncertainty principle $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$, an idea of the Schrodinger equation, the statistical matrix, the Hamiltonian operator, knowledge of the remarkable properties of Hermitian operators, the rules of operation with switches and Poisson's brackets, the basic formulas of thermodynamics, but the presentation below will be based mainly on knowledge of the material in the school curriculum.

[Van03]: Van der Waerden (2003), Algebra

Let's continue with the concept of a microstate - this is a specific configuration of the system that describes the exact positions and impulses of all the individual particles that make up the system. Each microstate has a certain probability of occurrence as the molecules move. The macrostate of a system refers to its macroscopic properties such as temperature, pressure, volume and density.

5 Phase space. Probability distribution density

Each point in the phase space corresponds to a specific microstate of the system. During the evolution of the system,

the phase point representing it describes a certain phase trajectory in the phase space. The product of differentials:

$$dqdp = dq_1dq_2\dots dq_s dp_1dp_2\dots dp_s \quad (5.1)$$

It is considered as a "volume element" of the phase space $\Delta\Gamma$. With regard to the formula under study, taking into account the shape of the cuboid and the equality of the increment of the linear function to its differential, the sign Δ will be used next along with the designation of the differential.

Let's express the probability and probability density ρ to detect an object in the given coordinates of the phase space using the obvious formula:

$$dw = \rho(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s) dp dq \quad (5.2)$$

- the probability of finding the object under study in the specified infinitesimal intervals of coordinates and pulses within: $q_i \dots q_i + dq_i, p_i \dots p_i + dp_i$. In this case, the volume of the phase space is expressed in terms of energy according to the formula:

$$\Delta\Gamma(E) = \frac{d\Gamma(\bar{E})}{dE} \Delta E \quad (5.3)$$

Above, $\Delta\Gamma(E)$ denotes the number of quantum states with energies less than or equal to E . Next, the probability density ρ is given and the normalization condition is written:

$$\sum_{\Omega} \rho(\bar{E}) \Delta q \Delta p = 1 \quad (5.4)$$

the integral over all probabilities of the subsystem states forms a complete group of events $\Rightarrow$ for the probability density function $W(E)$:

$$\int W(E) dE = 1 \dots \sum W \Delta\Gamma = 1 \quad (5.5)$$

The formulae given above help to find the number of states of interest with energy between $E \dots E + dE$. It is assumed that an inertial frame of reference is chosen in which the total momentum and angular momentum of the entire subsystem under consideration is zero. The dash above the energy $\bar{E}$ denotes the average energy value of the subsystem for all

quantum states. Here and below the notation Δq and Δp are products of the form (5.1) over all degrees of freedom.

6 The quantum nature of prime numbers

Due to the nature of quantum mechanics and the statistical physics based on it, we can only talk about finding the probability density distribution for coordinates or momentum separately, and not for both together, since coordinates and momentum of a particle in general cannot have certain values at the same time due to the Heisenberg uncertainty principle. The desired probability distributions should take into account both the statistical uncertainty and the uncertainty directly inherent in the quantum mechanical description.

7 Preservation of phase volume. Entropy

According to Liouville's theorem, the volume of phase space has the property of invariance with respect to canonical transformations preserving Hamiltonian and integrals of motion, in particular energy, momentum, angular momentum. [Fer95].

[Fer95]: Fermi (1995), Notes on quantum mechanics

For the quasi-classical case, where the laws of quantum mechanics can be replaced by Hamilton's equations, which are a reformulation of the well-known Newtonian equations. At the same time, the volume of the phase space

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi)^s} \quad (7.1)$$

The value of $\Delta\Gamma$ is called the statistical weight of the microscopic state of the subsystem, and its logarithm is called the entropy. The entropy, in turn, is determined by the mean value, denoted by brackets $\langle \rangle$, of the logarithm $\Delta\Gamma$, both in the case of the description of the system under study from the position of its quantum state, from the probability density distribution function in energy E_i , and in the quasi-classical approach, from the probability density, according to the formulae

$$S = -\langle \ln w(E_i) \rangle = -\sum_i w_i \ln(w_i) \quad (7.2)$$

$$S = -\langle \ln [(2\pi\hbar)^s \rho] \rangle = - \int \rho \cdot \ln [(2\pi\hbar)^s \rho] dp dq \quad (7.3)$$

The entropy defined in this way is, like the statistical weight itself, a dimensionless quantity. (In school physics and in some textbooks of theoretical physics, the Boltzmann constant k_B is placed in front of the logarithmic sign in the last formula $= 1.38 \cdot 10^{23}$ J/K, which allows you to measure the absolute temperature in Kelvins rather than in energy units but hereinafter the Boltzmann constant will be more convenient in some cases to omit cases in which is easy to guess from the context).

For simplicity, consider a closed system as a whole (i.e. isolated from other systems, e.g. placed in a thermostat), where $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3$ are defined.... - statistical weights of its different subsystems. If each of the subsystems can be in one of the $\Delta\Gamma_\alpha$ states, then the phase volumes of the subsystems are multiplied and the entropies of the subsystems add up, which is illustrated by the expressions:

$$\Delta\Gamma = \prod_{\alpha} \Delta\Gamma_{\alpha}; \dots S = \sum_{\alpha} S_{\alpha} \quad (7.4)$$

In other words, the formula describing the phase space allows the separation of the variables. In practice, it is often necessary to deal with cases where not all of the microscopic particle motion is quasi-classical, but only the motion corresponding to some of the degrees of freedom, while for the rest of the degrees of freedom the motion is quantum (for example, the translational motion of molecules can be quasi-classical with the quantum nature of the intramolecular motion of atoms). The formula 3.1 can be written as

$$e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2} \dots e^{\alpha_k x_k} + e^{\beta_1 y_1} e^{\beta_2 y_2} \dots e^{\beta_l y_l} \\ = e^{\gamma_1 z_1} e^{\gamma_2 z_2} \dots e^{\gamma_k z_l} \quad (7.5)$$

where the exponents of x, y, z are chosen so that only one prime number is chosen from those listed in the formula (3.1), which is easily achieved by taking the natural logarithm. Looking ahead, we note that in classical mechanics the

variable w_k on which entropy depends cannot be chosen unambiguously, since in classical physics entropy is determined up to an arbitrary term.

The choice of the generalised momentum Δp_i or the generalised coordinate Δq_i for the role of the multiplier considered in the formula (5.2) is arbitrary. For the sake of simplicity, we limit the volume of the studied gas mixture to q units and consider all $\Delta q_i = 1$, i.e. we choose an element of small volume in the system that is numerically equal to one (nanometres, angstroms or an atomic unit of length a_0 used in atomic and quantum physics, the so-called Borovsky radius - the closest to the nucleus of the orbit of the unexcited electron of the hydrogen atom H in the atomic model $5.29 \cdot 10^{-11}$ m).

The ABC conjecture can be considered as a mathematical interpretation of a complex system consisting of simple subsystems, where the principle of additivity of entropy and multiplication of volumes of phase spaces of subsystems is fulfilled.

The formula (7.4) is suitable for expressing the law of conservation of entropy of a subsystem in the separation of variables and adiabatic processes, which are quite slow compared to the relaxation time / establishment of local equilibrium. In practice, under laboratory conditions, this time passes quickly and is comparable to the time of propagation of a sound wave in a vessel filled with gas.

Speaking of the exponent in the formula (7.5), we note that the well-known formulas for the distribution of the probability density of finding particles are expressed in terms of an exponent: as in the Boltzmann distribution studied in physics and mathematics schools $n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$ - the so-called barometric formula - and Maxwell's distribution:

$$dw = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \quad (7.6)$$

Both formulae give an idea of the statistical ensemble that should be considered in more detail.

8 Radicals of the numbers A, B, C and phase space

The ABC conjecture works with the concept of the quality of a triple of numbers based on the decimal logarithm. (Let us assume a transition to the natural logarithm by simultaneously dividing the numerator and the denominator by $\ln 10$). For example, the radical of the product of the numbers $Rad(abc)$ corresponds to a mixture of ideal gases with non-degenerate energy levels, which is achieved at a sufficiently low temperature when only the translational and rotational degrees of freedom for polyatomic molecules are activated. Considering the above, this means the first power of the prime numbers of the formula (3.1).

Due to the Clapeyron equation $PV = kNT$ it is possible to control the temperature, the gas pressure by adjusting the initial temperature, the number of molecules in the mixture (concentration) and the volume of the subsystem. Thermodynamic relations are used to easily calculate the energy of the gas molecules and the entropy, and hence the volume of the phase space $\Delta\Gamma_i = \exp(S(E_i))$. Next we can calculate $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3 \dots$ - The statistical weights of the gases 1, 2, 3 in the mixture are each equal to the prime numbers of the formula (3.1) of the first degree - the radical $Rad(abc)$. Let's denote such a value of the volume of the phase space under $\Delta\Gamma_0$ and the corresponding entropy

$$S_0 = \frac{\ln Rad(abc)}{L} \quad (8.1)$$

in the denominator of this fraction it is necessary, according to the definition of entropy (7.2), and the length of this diagonal or the total number of elements $L = k+l+m$ is calculated from the formula 3.1 and is equal to the total number of prime factors in the ABC conjecture. If each of the subsystems can be in one of the Γ_α quantum states, then the phase volumes of the subsystems are multiplied and the entropies of the subsystems add up.

In the case of adiabatic compression, the basic thermodynamic equation takes the form that the internal energy of the gas decreases (increases) only by the amount of work done by the gas (over the gas). According to the formula of the first law of thermodynamics $dQ = dE + PdV$, where dQ is the

amount of heat, P is the gas pressure, dV is a small increase in volume, the multiplier of PdV is equal to the work done. In an adiabatic process $dQ = 0$ there is no heat exchange, there are no dissipative processes, and therefore all changes in the subsystem remain reversible and $dE = -PdV$.

It is known from school thermodynamics that, in an adiabatic process, the relationship between pressure and volume / temperature and volume has the form

$$PV^\gamma = \text{const} \dots TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (8.2)$$

where $\gamma > 1$ is the quotient of the heat capacity at constant pressure divided by the heat capacity at constant gas volume $\frac{C_P}{C_V}$. In adiabatic compression the entropy of the system remains constant, but degenerate energy levels ϵ_k (specific energy per gas molecule) are **switched on** due to an increase in temperature.

This is accompanied by the appearance of degrees above one in the formula (3.1). Let's denote such a statistical state of the system by the letter $\tilde{D}$, which symbolises the appearance of degenerate energy levels or entropy, $S_{\tilde{D}}$. (Details are given below). Next, we divide the phase volume corresponding to some generalised coordinates or impulses (e.g. those associated with quantum effects) into separate subsets of the studied phase space: A, B and C, according to the indices given in the formula (3.1). As mentioned above, entropy is an additive function). Due to the adiabatic compression, which preserves the entropy, and the conditions of the experiment, we obtain

$$\begin{aligned} \check{q}(a, b, c) &= \frac{\ln(c)}{\ln \text{Rad}(a) + \ln \text{Rad}(c-a) + \ln \text{Rad}(c)} \\ &\approx \frac{S_C \cdot m}{S_0 L} = \frac{S_C \cdot m}{(S_A + S_B + S_C)L} < 1 \quad (8.3) \end{aligned}$$

In this formula, the function $\check{q}(a, b, c)$ is calculated, given on the domain of positive real numbers greater than or equal to two $\mathbb{R} \geq 2$, coinciding with the original value of $q(a, b, c)$ on $\mathbb{Z}$.

Taking into account the previously made conclusion after the formula 3.3 on the dimension that $\dim(A) \leq 2$ we will consider the independent variable a and first consider the special case of the constancy of the term c , changing only the factors p_1, p_2 . It is assumed here that $a = p_1 \cdot p_2$ or $a = p^2$. Then you can replace the expression in the denominator $\ln(\text{Rad}(a)) + \ln(\text{Rad}(c-a))$ by $\ln(p) + \ln(c-p)$ or, respectively, by $\ln(p) + \ln(c-p^2)$ (all constant factors are taken out as constants separately and do not play a role when taking the derivative to find the extremum).

The problem of finding the extremum of the function $\check{q}(a, b, c)$ for a given c is reduced to finding the maximum and minimum values of the denominator, where the variable part is the number p , while $c = \text{Const.} \Rightarrow$ the minimum $\check{q}(a, b, c)$ is reached at $p = \frac{c}{2}$, for the case if $a = p_1 \cdot 2$ the desired minimum will be $p = \sqrt{\frac{c}{3}}$, which is easy to understand from the symmetric occurrence of the variable part of the expression under the sign of the logarithm in the denominator, analyzing a function of the form $y = x(c-x)$ or, respectively, $y = x(c-x^2)$.

Let's move from the particular case to the general one. It is easy to establish that $\check{q}(a, b, c)$ on the extended domain of definition is continuous and differentiable.

Topological algebra. Topological space

Topological algebra is an algebra and at the same time a topological space, where the algebraic and the topological structures are coherent in a specified sense. If there is a topology in some algebraic body M , i.e. there is **convergence**, in other words, it is known what the relation $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ means, and the operations available in the space M are continuous with respect to this topology.

Therefore, it is possible to calculate the derivative and apply the well-known from school mathematics **Newton-Leibniz formula** for upper and lower estimates of the values of a continuous differentiable function over a certain interval.

There is a transition to random (thermodynamic- statistical) variables after the equal sign. The numerator denominator contains the value of the entropy of the phase space, taking into account the multipliers m and $L = (k + l + m)$, expressed through the definition of the entropy of the subsystem C as

part of the unifying system $D = A \cup B \cup C$ under conditions of an adiabatic process.

Linear differential for the case of many variables

The problem of finding the extremum of a function for the case of many variables is reduced to finding the gradient of the scalar function $\check{q} : M \rightarrow R$ defined on the topological-algebraic body $M = \{R^L | R \geq 2\}$ in L dimensional space $grad\check{q}$ - by the number of primes of the formula 3.1 - each prime number is considered as an independent random variable (this approach has already been used in the analysis of the hypothesis of Leonard Euler in 18). The deeper connection between simple and random variables is explained below in the Fluctuations section. B 14. The partial derivative will be as follows: $grad(\check{q}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}i, \frac{\partial f}{\partial x_2}j, \frac{\partial f}{\partial x_3}k \dots)$, for which partial derivatives should be calculated. Here, $x_1, x_2, x_3 \dots$ refers to variables, according to the number of primes of the formula 3.1 - each prime number is treated as an independent random variable. The meaning of this is explained below in the Fluctuations section. 13.

The partial derivative will be as follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{q}}{\partial p_i} &= \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial p_i} \frac{1}{\ln Rad(abc)} - \frac{\ln c}{(\ln Rad(abc))^2} \frac{\partial \ln p_i}{\partial p_i} \\ &= \frac{k}{p_i} \frac{1}{\ln Rad(abc)} - \frac{\ln c}{(\ln Rad(abc))^2} \frac{1}{p_i} \\ &= \frac{k - \check{q}}{p_i \ln Rad(abc)} \quad (8.4) \end{aligned}$$

To calculate, note that $\ln C = \sum_1^L k_i p_i$ and $\ln Rad(abc) = \sum_1^L p_i$.

As a result, the Newton-Leibniz formula is generalized to the case of many variables, taking into account the scalar product $(grad\check{q}, \Delta x)$ in L-dimensional space (the dimension is taken from the formula 3.1 or the number of primes in $Rad(abc)$), where each prime number is treated as a random variable $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots)$.

Consequence: the increment of the function $\Delta \check{q}$ over the entire domain of definition of Ξ does not go to infinity and can be limited from above and below by some convenient

functions. Below, a top-bounding function with a normal distribution will be selected.

The rule of addition of the variance of independent random variables is known from mathematical statistics. Therefore, the final conclusion of the inequality $\check{q}(a, b, c) < 1$ of the above expression is based equally on both statistical physics and mathematical statistics. The resulting inequality is strict based on the type of fraction. The approximation sign in the formula (8.3) is more accurate the greater the entropy value.

Random variables appeared here again, denoted by capital letters A, B, C, D

Accessing the random variables A, B, C, D and statistical physics / mathematical statistics was helped in obtaining the correct estimate of $\check{q}(a, b, c)$ and, accordingly, $q(a, b, c)$ - it should not exceed one.

Nevertheless, in the course of numerical experiments, a number of maximum values of $q(a, b, c)$ above one were found. How to explain this paradox? - The author is convinced that this phenomenon is caused by **fluctuations**, as explained below in the section (see section 14), specifically dedicated to this phenomenon.

9 Linear Spaces and Matrix Functions

[Lan01]: Landau (2001),
Mechanics. Theoretical Physics
In 10. Vol

To find a proof of the ABC conjecture by mathematical methods, it is necessary to use the rules of linear algebra, representations of quantum mechanics about the wave function, the operator form of the Hamiltonian [Lan01], estimates of entropy using a statistical matrix in a quantum mechanical representation. The rapid development of quantum computing and cryptography is helping to popularise knowledge of quantum mechanics. In order to broaden the horizons of a student of the XXI century, it would be logical to add the basics of quantum mechanics to the secondary school curriculum, using an analogy with radio waves, signal spectra. For many years, the electronic configuration of an atom, the arrangement of electrons in an atom according to levels and sublevels, has been studied in school chemistry classes on the basis of general concepts of quantum mechanics. Based on the conditions of the ABC conjecture, an additive function should be chosen. The most suitable candidate is entropy, defined as the logarithm of the phase space (7.2). For adiabatic

processes the volume of the phase space is preserved. This simple statement is the key to the proof and requires almost no mathematical calculations.

The formula (3.1) implies a statistical description of a physical system consisting of subsystems expressing the additive property of a common resource for energy, entropy and other thermodynamic quantities. These properties are provided by the decomposition of integers A, B, C into prime numbers for which Greatest Common divisor (GCD) = 1. It is known from the introductory course in number theory that the rules apply to the ring of integer polynomials in a given field of complex numbers $k[x]$. Such polynomials have a number of properties similar to those of integers. There is a homomorphism between the algebra of integers and the algebra of polynomials for addition and multiplication operations. In the following, the terms simple and irreducible are used synonymously when referring to polynomials.

Let $f \rightarrow k[x]$, then there is a one-to-one decomposition:

$$f = c \prod_p p^{\alpha(p)}, \quad (9.1)$$

where c is a constant and the product is taken by irreducible polynomials of the form $(\lambda - a_i)^k$ [Szi02] and the constant are uniquely determined. Integer polynomials are written in the formula below, based on irreducible ones, they are also **mutually simple**, which is briefly expressed in the formula above: there are polynomials q_1, q_2, q_3 , the total sum of the formula (3.1) assuming GCD (Greatest common divisor) = 1.

[Szi02]: Szidarovszky (2002),
Introduction to Matrix Theory:
With Applications to Business
and Economics

$$\begin{aligned} & (\lambda - a_1)^{\alpha_1} (\lambda - a_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - a_k)^{\alpha_k} q_1(\lambda) \\ & + (\lambda - b_1)^{\beta_1} (\lambda - b_2)^{\beta_2} \dots (\lambda - b_l)^{\beta_l} q_2(\lambda) \\ & + (\lambda - c_1)^{\gamma_1} (\lambda - c_2)^{\gamma_2} \dots (\lambda - c_m)^{\gamma_m} q_3(\lambda) = 1 \end{aligned} \quad (9.2)$$

Each of the above polynomials can be uniquely mapped onto a linear map $\mathcal{A}$ (respectively $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$) with a characteristic polynomial [12,13] whose roots are taken from formula 3.1 - these will be just the primes contained in $Rad(abc)$. If a linear transformation of dimension n has n independent

eigenvectors, then using these vectors as a basis, we will reduce the square matrix of the linear transformation to a diagonal form, while the eigenvectors corresponding to different eigenvalues will be linearly independent, and we can choose a basis in which such vectors will be orthogonal. In the case of multiple roots we have:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathcal{A})^k \mathbf{x} = 0 \quad (9.3)$$

By elementary transformations, the linear mapping matrix can be reduced to a Jordan form of size $k \star k$ corresponding to the multiplicity k (height) of the root vector [12,13]. Putting it all together, it is possible to obtain a linear mapping whose characteristic polynomial is the product of the characteristic polynomials of the linear mappings from formula (3.1). The matrix corresponding to this combined linear mapping will have the block-diagonal form $\begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}$. The eigenvalues of a matrix are the result of combining the eigenvalues of the matrices $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. The result is a unique decomposition of the space $\mathbf{R}$ into a direct sum of invariant subspaces (in any order):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \oplus \mathbf{R}_2 \oplus \mathbf{R}_3 \oplus \mathbf{R}_4 \oplus \mathbf{R}_5 \cdots \oplus \mathbf{R}_L \quad (9.4)$$

The set of all root vectors corresponding to the eigenvalue of λ forms an invariant subspace of $\mathbf{R}_i$. This linear space is described by the matrix $\widetilde{D}$.

We set the determinant of this matrix and its characteristic polynomial to zero in order to search for eigenvalues and vectors:

$$\text{Det} \widetilde{D} = \prod_{i=1}^{i=L} (\lambda - \lambda_i)^{k_i} = 0 \quad (9.5)$$

where L is the number of primes in the formula (3.1) λ_i is the proper/root value of the linear mapping $\widetilde{D}$ and hence of the matrices $\widetilde{D}$. It is known from the algebraic theory of matrices that elementary transformations can be performed on λ -matrices to produce similar matrices, but at the same time the trace of the matrix remains constant, i.e. the sum of its elements on the main diagonal and the determinant

$\det$ - both quantities do not depend on the basis and are invariant.

Denote by $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_i$ the eigenvalues of the matrix, they are just taken from a polynomial (9.2) with roots from a set of prime numbers (3.1), but using the logarithm function and averaging over the main diagonal of the matrix (for more information, see the formula (10.4)), all these eigenvalues are different, non-zero under the conditions of the ABC conjecture.

Definition 9.1 It is known that the determinant of the matrix is equal to the product of the eigenvalues, which is not difficult to verify by counting the determinant of the diagonal matrix directly.

In our case, from the point of view of thermodynamics, $\det \tilde{\mathcal{D}}$ corresponds to the phase space of the studied system with unexcited energy levels $\Gamma_0 = \text{Rad}(abc) = \det \tilde{\mathcal{D}}$.

Since we are considering square matrices, and due to the matrix commutability property of ourselves, in a number of cases, including the one under study, it is possible to raise the λ matrix $\tilde{\mathcal{D}}$ to a power, perform algebraic operations on it, calculate polynomials from the matrix.

This illustrates the general rule of homomorphism (A homomorphism in the category of algebraic systems is a mapping of an algebraic system A to B that preserves the basic operations and basic relations).

The general rule of homomorphism over algebras. $A = \langle A, \phi \rangle, B = \langle B, \psi \rangle, f : A \rightarrow B$

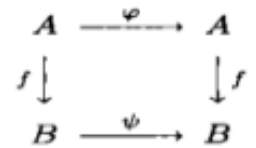


Рис. 9.1: The general rule of homomorphism over algebras.

In general, scalar functions can be computed from a square matrix by decomposition into a Taylor series, but with some peculiarities [Mys72].

In the theory of analytic functions (i.e. having a derivative in the complex plane, which leads to an amazing conclusion about the infinite differentiability of an analytic function). It is known that a series of a complex variable has the property of converging on a certain convergence ring $r < |z| < R$ on the complex plane $\mathbb{C}$, with the exception of poles.

[Mys72]: Myshkis (1972), Introductory Mathematics for Engineers. Lectures in Higher Mathematics

10 Logarithm of the Matrix

Let's calculate the logarithm of the matrix $\tilde{\mathcal{D}}$ with root vectors corresponding to (9.2). Here, different eigenvectors/root vectors are chosen as the basis, which are prime numbers, and therefore the matrix will have a block-diagonal form (the order of the Jordan cells is not essential).

The analytical function F works with each colortejordan cell separately:

$$F(D) = F_1(D_1) \oplus F_2(D_2) \cdots \oplus F_i(D_L) \quad (10.1)$$

(From this decomposition, it is easy to conclude that a cell-by-cell/block comparison of functions from matrices is possible, which will be used below). From this decomposition it is easy to conclude that a cellular/blockwise comparison of functions from matrices is possible, which will be used below.

It is quite easy to calculate the logarithm from a Jordan cell by applying the decomposition in one row Newton-Mercator (Taylor series for the function of the natural logarithm of the matrix) and then represent the matrix to the right of the equal sign as the sum of the unit matrix $\mathbf{I}$ and the matrix $\mathbf{G}$ with zero values on the diagonals: $\mathcal{D} = \lambda(\mathbf{I} + \mathbf{G})$.

$$\tilde{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

Applying the well-known Taylor series expansion of the logarithm of a scalar variable and taking into account the

above, which also applies to the matrix $\mathbf{G}$, we have

$$\ln(I + \mathbf{G}) = \frac{\mathbf{G}}{1} - \frac{\mathbf{G}^2}{2!} + \frac{\mathbf{G}^3}{3!} - \frac{\mathbf{G}^4}{4!} \dots \quad (10.3)$$

This series ends at some degree, since the Jordan cell is nilpotent and, when raised to the power of k (the dimension of the Jordan cell), becomes a zero matrix.

As a result, it is easy to calculate the entropy of $S = \ln \Delta \Gamma$ by averaging over all microcanonical states. It is important to take into account the normalisation condition - the sum of all probabilities of the states of the system under study forms a complete group of events $\Rightarrow \sum_{i=1}^{i=L} \lambda_i = 1$. Here the probability is expressed from the eigenvalue λ_i , which is uniquely associated with the energy of the microstate, summation is performed over all possible microstates, and non-zero values are on the main diagonal of the matrix $\tilde{\mathcal{D}}$. The length of this diagonal is $L = k + l + m$ - the number of simple factors in the ABC conjecture, see formula (3.1).

Initial entropy value 8.1. The logarithm of the product is decomposed into the sum of logarithms and is equal to the mean value from the trace of the entropy matrix $\Rightarrow$ divided by the number of non-zero values on the main diagonal of the matrix $\mathcal{D}$, i.e. the length of the chain L in the formula (3.1). Let us switch on the degeneration of the energy levels at time t_1 , which in the language of matrix algebra means the appearance of multiple eigenvalues - root vectors (9.3). This can be realised by "including" powers greater than one in the characteristic polynomial:

$$\frac{1}{L} \prod_{i=1}^{i=L} \frac{e^{-\frac{E_i}{T}} * (\lambda - \lambda_i)^{1+\sigma(t-t_1)(k_i-1)}}{1 + \sigma(t - t_1)(k_i - 1)} \quad (10.4)$$

and then the matrix corresponding to this characteristic polynomial is brought into Jordan form and the logarithm is taken from the resulting matrix. Let's explain the meaning of the variables:

- λ_i - all prime numbers are multipliers of the L-series of numbers $\text{Rad}(abc)$, they are also eigenvalues of the linear mapping /matrix
- k_i is the exponent of the formula (9.2), at the same time the multiplicity of the root and the size of the i -th Jordan cell of the linear map.

- σ - function sigmoid $\sigma(t)$ can be approximated by the formula $\frac{1}{1+e^{-\nu(t-t_1)}}$ where the parameter ν is set from the outside and regulates the smoothness of the change, the higher the value of ν , the steeper the "step" at time t_1 . This function is defined here on the real axis $\mathbb{R}$.
- E_i is the energy calculated by the microstate i . This factor, divided exponentially by the temperature T , determines the density of the probability distribution depending on the Hamiltonian of the system under study.

Above, according to the formula (9.4), it was concluded that it is possible to decompose the linear space into a direct sum of subspaces, i.e. to reduce the matrix to Jordan form. For each cell there is a unique root λ_i . Since the multiplier $e^{-\frac{E_i}{T}}$ remains the same within each Jordan cell, it can be considered as a constant and reduced in the following arguments ("cell-by-cell" / "block-by-block" comparison of matrix functions).

From the point of view of school physics, it can be seen that when studying an ideal Carnot machine, the calculation of its efficiency is based on the value $\frac{\Delta Q}{T}$, which is the entropy differential. Consequently, the formula (10.4), taking into account the definition of entropy (7.2), operates with probabilistic quantities, which in turn is a purely mathematical concept that excludes such an unusual quantity for the algebra of matrices as temperature (the latter can be determined for the system under study from the canonical definition of Gibbs by taking a quotient, the derivative of entropy with respect to energy).

The function (10.4) is differentiable and can be analytically extended to the complex plane. This means that it can be positioned along the main diagonal of the Jordan form and the matrix logarithm calculated from the result. This function corresponds to the volume of the phase space. Reducing the matrix just mentioned to the Jordan form, taking the logarithm of each element on the main diagonal of the matrix and averaging over all the values will give the entropy value of the system under consideration.

In fact, a careful look at (10.4) reveals the formula (7.2) for finding the entropy. The average over all microstates is obtained by dividing by the total number of microstates.

Each microstate is considered equally likely. When averaging the logarithm of the matrix, the sign of the product in the formula (10.4) is replaced by the sum. The somewhat cumbersome denominator of the fraction after the product sign in this formula allows you to first average the value of the logarithm of the element on the main diagonal separately for each Jordan cell, taking into account the multiplicity (degree) of each multiplier. According to the results of such cellular averaging, the exponent of each prime number from the matrix is reduced. Next, averaging is performed over the entire diagonal of the matrix, where the unique value of each prime number occurs only once, and there are L such numbers in total. There is a "smearing" of the probability density from the averaging operation over all possible Jordan cells and taking into account the multiplicity of the root vector λ_k , i.e. its height or exponent of a prime number in the ABC conjecture formula.

$$\begin{aligned}
 S &= -\langle \ln w(\lambda_i) \rangle = -\sum_i w_i \ln(w_i) \\
 &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{i=L} \frac{1}{k} \ln(\lambda_i^k) e^{-\frac{E(\lambda_k)}{T}} \quad (10.5)
 \end{aligned}$$

During adiabatic compression/expansion, the volume of the phase space of the system and the averaged matrix logarithm of it - the entropy - remain constant. The multiplier $e^{-\frac{E_k}{T}}$ does not qualitatively change the main conclusion: the conservation of entropy as a result of an adiabatic change in the macrostate of the system. In this case the trace of the matrix $\widetilde{\mathcal{D}}$ is equal to the sum of the traces of the combined matrices. It is possible to compare the initial value of the entropy S_0 with the value at time $t_1 + 0$ and then select some degrees of freedom of the system under study separately. The situation was considered above when not all the motion of the system is quasi-classical, but only the motion corresponding to a part of the degrees of freedom, while for the rest of the degrees of freedom the motion is quantum. Since entropy is preserved during the adiabatic process, it is possible to return the subsystem to its original state.

The cumbersome formula (10.4) and the formula (10.5) based on knowledge of statistical physics can be replaced by the adiabatic equation from the school course (8.2), which is

limited to a general description of degenerate energy levels and, accordingly, the appearance of Jordan cells greater than one, which greatly simplifies understanding the essence of the proof.

11 Trace of matrices. Entropy

Thus, a simple matrix relation can be formulated in the form of the following equations

$$Tr(\mathbf{D}) = Tr(\mathbf{A}) + Tr(\mathbf{B}) + Tr(\mathbf{C}) \quad (11.1)$$

which is obvious from the analysis of the main diagonal of the matrix $\tilde{\mathcal{D}}$ of the block diagonal form $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$.

And the following formula means averaging statistical variables taking into account the weights of the terms (here diagonal lengths) $L = k + l + m$ of each block of the matrix $\tilde{\mathcal{D}}$.

$$\frac{1}{L}Tr(\tilde{D}) = \frac{k}{L} \frac{Tr(\mathbf{A})}{k} + \frac{l}{L} \frac{Tr(\mathbf{B})}{l} + \frac{m}{L} \frac{Tr(\mathbf{C})}{m} \quad (11.2)$$

Note that all elements on the main diagonal of matrices are positive numbers. The latter implies the equality $S_D = S_A + S_B + S_C$ or in terms of matrix traces:

$$Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_{\tilde{D}} = Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_A + Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_B + Tr(\hat{w}(\ln \hat{w}))_C \quad (11.3)$$

12 Arbitrary A, B, C and quantum mechanics

The school curriculum includes the basics of combinatorics and probability theory, pendulum motion, oscillator equations, fundamentals of thermodynamics, internal energy, amount of heat, first law of thermodynamics, wave interference, signal spectrum, resonant phenomena, the concept of wave-particle dualism, photons, photoelectric effect phenomenon, atomic orbitals and spin, Heisenberg's uncertainty principle [Fer95],

the basics of laboratory measurements and their errors, and so on. - This extensive list of concepts allows us to draw an analogy of the material presented with the school curriculum.

It is possible to map a quantum mechanical system to linear maps $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Let's move from Euclidean space to Hilbert space. [Hilbert space](#), studied in the first decade of the 20th century by David Hilbert, Erhard Schmidt and Frides Rees within the framework of the theories of partial differential equations and quantum mechanics, can be explained to schoolchildren from the standpoint of the basics of radiophysics, equations describing the propagation of an electromagnetic wave, the phenomenon of interference.

$$\max(\text{Var}(S_A), \text{Var}(S_B), \text{Var}(S_C)) < \text{Var}(S_{\bar{D}}) = \text{Var}S_0 \quad (12.1)$$

Due to these relations, taking into account the additivity property of entropy, subordination to the normal law of fluctuation of this value, it is easy to find the upper limit of $q(a, b, c)$ (see section 14). But to do this, it is necessary to consider the basics of statistical physics. Application 1.

13 Analogies from ODE systems

It is interesting to draw some analogies between the quantum mechanical approach described above and systems of ordinary differential equations.

Consider the fundamental matrix of a system of linear differential equations Y and the Vronsky determinant $W = \det|Y(t)|$. According to the Liouville-Ostrogradsky theorem [\[Mys72\]](#) 13, section VIII(18)]:

[\[Mys72\]](#): Myshkis (1972), Introductory Mathematics for Engineers. Lectures in Higher Mathematics

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{Tr} D(\tau) d\tau \cdots \prod_1^n \lambda_i = \exp \int_0^T \text{Tr} D(\tau) d\tau \quad (13.1)$$

At time t_1 the multiplicity of the roots increases, which physically corresponds to the degenerate energy levels of

the system, but the trace of the matrix under the integral remains constant. A similar formula has been found for the determinant of the Polish philosopher and mathematician Vronsky, which is useful for finding the derivative of a vector function in a system of linear differential equations.

The above mathematical formulae reveal the physical meaning of phase space and the trace of the matrix in the theory of ordinary differential equations. The adiabatic process and the constancy of entropy play an important role. There are other analogies to phase space $W \rightarrow \Gamma$ and entropy $Tr(D(\tau)) \rightarrow S$. Note that the matrices are infinite and reduced to the Jordan form, the sigmoid function in question turns on/off the multiplicity of the roots and provides a transformation of the matrix just mentioned.

14 Fluctuations

For the $\forall$ formula (3.1) there is a whole class of physical subsystems: ideal gases, solutions, vibrations of the crystal lattice with quasi-particles - phonons, and so on, where the above approaches are implemented. So there is an equivalence function f that maps each element as an elementary cube 1^n from the sets A and B into C , i.e. $f(A, B) \rightarrow C$,

Taking into account the arguments above and the formula, it is necessary to find a suitable interpretation for the quality indicator of the triple $q(a, b, c)$, given through a continuous differentiable function $\check{q}$, the upper bound of which 8.3 asymptotically approaches the thermodynamic estimates made in this chapter, and even more precisely the greater the entropy value 8.1.

(In thermodynamics, the number of molecules is operated on the order of the number/Avogadro constant - the number of particles contained in one mole of any substance $6.022 \cdot 10^{23}$). Most of the well-known examples of finding triples of numbers using supercomputers and distributed computing networks are so-called "good triples"[ABC] with $q > 1$ exceeding one ($q(a, b, c) \sim 1.4$), but these more athletic than scientific records are on the order of one ten thousandth of the Avogadro constant.

Assuming an upper bound for large N , it is more expedient to replace the word "quality" for $q(a, b, c)$, respectively, of the

[ABC]: ABChome (), Волонтерская сеть под названием ABC-home посвящен распределенному вычислительному проекту, который должен был составить полный список всех троек ABC, состоящих из целых чисел, состоящих максимум из 18 цифр.

function $\check{q}$ defined by us, with the "defect" generally accepted in error theory according to the formula of fluctuation from the average value of the investigated system combining subsystems A, B, C .

According to 12.1 the defect index of the system under study q_{ABC} , will be obviously greater than $\check{q} < q_{ABC} = \frac{\Delta S}{S}$ and the last top-limiting function will have a normal distribution due to the law of large numbers, as well as the properties of additivity of entropy.

Central limit Theorem

It is known that normally distributed random variables are widespread in practice [Gmu68]. What is the reason for this? The answer to this question was given by the outstanding Russian mathematician A.M. Lyapunov (central limit theorem): if a random variable X is the sum of a very large number of mutually independent random variables, the influence of each of which on the entire amount is negligible, then X has a distribution close to normal.

[Gmu68]: Gmurman (1968), Fundamentals of probability theory and mathematical statistics Translated by Scripta Technica Ltd

Assuming an upper limit of q_{max} for the reference value of the three numbers A, B, C , for large N , it is more convenient to replace the word "quality" by a more appropriate "defect" according to the formula of the fluctuation from the mean, namely $\Delta q = \frac{\Delta S}{S_0}$. For an isolated subsystem, the very statement about fluctuations in energy, entropy, temperature, number of particles and other thermodynamic parameters is not appropriate - one can only talk about fluctuations by considering the system as a whole. Let us define the equilibrium entropy of a body $S(E, V)$ as a function of its (average) energy and volume. By fluctuation of entropy we mean the change of the function $S(E, V)$, formally considered as a function of the exact (fluctuating) values of energy and volume. It is known that the probability of fluctuation in the system is proportional to the exponential deviation of the entropy:

$$w = e^{\Delta S} \quad (14.1)$$

This is the entropy of the whole system.

Let's start by finding the mean square of the fluctuation in the number of particles of an ordinary ideal gas in a relatively small volume isolated in the gas. Assuming a

[Hud63]: Hudson (1963),
Lectures on elementary
statistics and probability

uniform distribution of the gas molecules over the whole volume V_0 and the conditions for the smallness of the subsystem under consideration in comparison with the whole system $\frac{V}{V_0} \ll 1$, the square of the fluctuation of the number of particles in the subsystem (points in the manifold of the phase space 1^n) is determined by the formulae [Hud63]:

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = N; \dots \frac{(\langle (\Delta N)^2 \rangle)^{1/2}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (14.2)$$

The relative fluctuation of the number of particles is equal to the inverse square root of the average number of particles. Similar formulas are known from textbooks of mathematical statistics [10]. Based on the average square of the fraction in a given volume of gas, a Gaussian probability distribution of the fluctuation of the number of particles is found:

$$w(N)dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{N}}} \exp\left(-\frac{(N - \bar{N})^2}{2\bar{N}}\right) dN \quad (14.3)$$

[Szi02]: Szidarovszky (2002),
Introduction to Matrix Theory:
With Applications to Business
and Economics

This formula can be used for small deviations. For small N is more appropriate to use the Poisson formula, known from mathematical statistics [Szi02].

$$w_n = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!} \quad (14.4)$$

In the case we are interested in (assigned volume) $V \ll V_0$ (initial volume), the number of particles in the assigned volume is assumed to be small compared to the total number of particles in the gas, although it may differ significantly from its average value. Taking into account the Stirling formula $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, the formula (14.3) changes to the formula (14.4) with small deviations.

[Gmu68]: Gmurman (1968),
Fundamentals of probability
theory and mathematical
statistics Translated by Scripta
Technica Ltd

Regarding the issue of entropy fluctuations, we note the following. According to Chebyshev's theorem [Gmu68], chapter 9.3) in the presence of a sufficiently large number of independent random variables with limited variances, the event can be considered practically reliable, which means that the deviation of the arithmetic mean of random variables from the arithmetic mean of their mathematical expectations will be arbitrarily small in terms of the absolute value of the condition.

By virtue of Chebyshev's theorem, Lyapunov's central limit theorem and the additivity property of entropy, a Gaussian probability distribution can be applied (refDispN -14.4) for the entropy fluctuation $\Delta S = \frac{1}{\sqrt{S_0}}$ and the maximum value of the function q_{ABC} denoted as $\Delta q_{ABC_{max}}$. In fact, the number of particles in a gas, as well as entropy, are additive quantities and colortelintegrals of motion, therefore they must be described by similar formulas.

The Gaussian probability distribution (14.2 -14.4) can be applied to the fluctuation of entropy $\Delta S = \sqrt{S_0}$ and the upper bound of Δq_{max} . In fact, the number of particles in a gas and the entropy are additive quantities and integrals of motion, so they must be described by similar formulas. It is enough to imagine an experiment in which the initial container is divided into N small equivalent containers, where N is a rather large number, but obviously much smaller than the Avogadro number and the number of molecules in the system. Then, instead of the average number of particles, the entropy value can be substituted in the above formulae for estimating the fluctuation.

The question of the density of the distribution of prime numbers remains open in science. At the same time, it is possible to introduce a random function q_{ABC} , obeying the law of normal distribution, which will limit the continuous and differentiable $\check{q}(a, b, c)$ from above for sufficiently large values of $\frac{Rad(abc)}{L}$. Let's make estimates of the standard deviation q_{ABC} for the system as a whole, combining subsystems:

$$\sigma_{q_{ABC}} = \frac{(\langle (\Delta S)^2 \rangle)^{1/2}}{S} = \frac{1}{\sqrt{S_0}} = \sqrt{\frac{L}{(\ln(Rad(abc)))}} \quad (14.5)$$

It was said above 9.4 that Ξ is the gradient of a continuous and differentiable function $grad(\check{q})$ over the entire definition area $\check{q} : M \rightarrow R$. This gradient does not turn to infinity and the increment $\Delta \check{q}$ can be limited from above by a normally distributed random function q_{ABC} .

To estimate the upper bound of the maximum deviation $\Delta q_{ABC_{max}}$, we can take into account the discrete nature of the phase space and the principle of equal probability of microstates, as well as the normalization condition (6.5).

Definition 14.1 The maximum variance of $\Delta q_{ABC_{max}}$ means the lowest value of the probability of ω finding the object in the microstate under study.

Since the fluctuations of entropy obey the law of normal distribution and (14.5), the same is true for $\Delta q_{ABC_{max}}$.

To estimate the upper bound of the maximum deviation $\Delta q_{ABC_{max}}$, we can take into account the discrete nature of the phase space and the principle of equal probability of microstates, as well as the normalisation condition (5.5). The result of algebraic transformations ultimately turns out to be cumbersome, but it is possible to make an estimate sufficient to prove the ABC hypothesis. A few paragraphs below, a numerical integrator experiment using the Monte Carlo method will be performed and a histogram of the normal distribution is shown.

The maximum deviation of $\Delta q_{ABC_{max}}$ corresponds to the lowest probability value. In turn, the probability of such a microstate is determined only by the values on the main diagonal of the static matrix. In total there are L such elements, the smallest integer being one, so we have $w_{min} = \frac{1}{L}$, which corresponds to the law of normal distribution:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta q_{max}^2}{2\sigma^2}\right) \quad (14.6)$$

Where the standard deviation of σ is determined by

$$\sigma = \sqrt{\frac{L}{(\ln(Rad(abc)))}} \quad (14.7)$$

Note that $L \leq \pi(Rad(abc))$ Riemann functions π . This statement simply says that the length of the chain of different primes in the formula (3.1) does not exceed the total number of primes not exceeding $Rad(abc)$, determined by the Riemann function of the radical of the product A, B, C . Let us explain that the Riemann function $\pi(x)$ is defined as the number of prime numbers that do not exceed the integer number x . Chebyshev proved in 1851-1852 that if there is a limit, it must be equal to one:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\ln(x)/x} = 1 \quad (14.8)$$

Which leads to the conclusion:

$$\sigma_{q_{ABC}} = \sqrt{\frac{L}{\ln(Rad(abc))}} < \frac{1}{\sqrt{Rad(abc)}} \quad (14.9)$$

This ratio is more accurate the higher the value of $Rad(abc)$. Solving the equation (14.6) and assuming that the expression under the radical sign is positive, we find

$$\Delta q_{ABC_{max}} = \sigma \sqrt{2 \ln \frac{L}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \quad (14.10)$$

The result of the algebraic transformations turns out to be cumbersome in the end, but if we take into account the ratio between the length of the chain of prime numbers and the value of the radical $Rad(abc)$, small terms can be neglected (see below an alternative way of estimating $\Delta q_{ABC_{max}}$).

This is known from mathematical statistics courses:

$$\begin{aligned} |\Delta q_{ABC_{max}} < \epsilon| &\leq 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \dots \Phi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (14.11) \end{aligned}$$

(do not confuse the arbitrary parameter ϵ with the energy of a single molecule, denoted by the same letter above!)

Based on the length of the chain of the formula 3.1 equal to L , and the values of $\Delta q_{ABC_{max}}$, let's find the ratio between the minimum value of the chain length in 3.1 and $Rad(abc)$, which affects the discreteness factor of the phase space:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} &= \frac{\sqrt{Rad(abc)}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta q_{ABC}^2}{2\sigma^2}\right) \Rightarrow \\ L\sqrt{Rad(abc)} &= \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\Delta q_{ABC}^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

The formula in the second line defines the conditions under which the phase space discreteness factor affects 14.6. On the

right there is a rapidly increasing function that will easily exceed the value of the product of $\forall$ multipliers on the left $L\sqrt{Rad(abc)}$, which, taking into account the estimate of the standard deviation 14.9, means the disappearance of the desired triples as the entropy defined above increases 8.1. It is important to remember that from the formula 8.1 and 14.9 are followed by exponential growth of $rad(abc)$ with respect to the length of the chain of prime numbers L in the formula 3.1.

From what has been said, it is easy to prove that for $\forall$ given in advance ϵ there are only a finite number of triples of numbers for which $q(a, b, c) = \check{q} < q_{ABC_{max}} - \epsilon$ (do not confuse the arbitrary parameter ϵ with the energy of a single molecule, denoted by the same letter above!) $\nexists q(a, b, c) = \check{q} > q_{ABC_{max}}$.

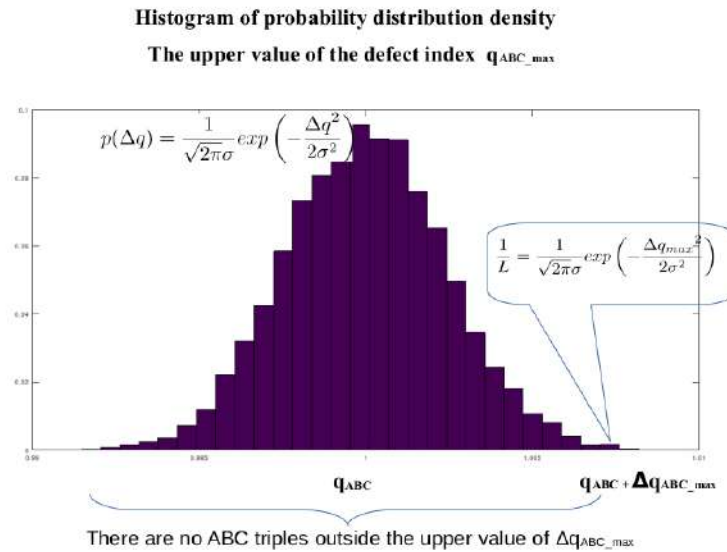


Рис. 14.2: illustrates the phase of the three ABC consideration $q(a, b, c) >$ there is not satisfies the

The result obtained can be compared with the ABC@home project, a histogram of the quality of triples of q from the number of decimal places in ABC numbers. Figure 2.2 The ABC@home project finds all triples of ABC numbers for a given upper bound on the "quality" of q_{ABC} and the number of decimal places.

The ABC@home project says "The list of so-called good triples, consisting of 20 digits, is already complete. For example, the graph shows that there are 11 good triples in which c contains 20 digits. If new good triples are found,

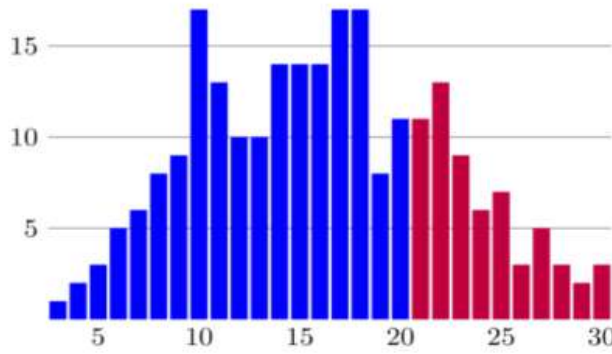


Рис. 14.3: The ABC@home project finds all triples of ABC numbers for a given upper bound on the "quality" of $q(a, b, c)$ and the number of decimals.

only the red part of the graph above will increase. (already 20 digits)".

ABC Volunteer ABC@home

A volunteer network called ABC@home is dedicated to the distributed computing project of searching for the so-called "good" triples (unbitten triples). In 2011, the ABC@home project achieved the goal of compiling a complete list of all ABC triples consisting of integers consisting of a maximum of 18 digits. The list includes 14,482,065 triples. See 241 ABC triples of "quality" q not lower than 1.4, which are often called "good" ABC triples. <https://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/abc/index.php> according to comp. on 05/11/2024

In fact, the [ABC] Project applies a logarithmic scale to the normal distribution $q_{ABC_{max}} = 1 + \Delta q_{ABC_{max}}$ and then a quantitative method for grouping a set of ranked data into equal subgroups, in this case - deciles), but the characteristic form of the normal distribution (see above the Maxwell distribution (7.6) and Fig. 114.2 has not changed from this.

[ABC]: ABC@home (), Волонтерская сеть под названием ABC@home посвящен распределенному вычислительному проекту, который должен был составить полный список всех троек ABC, состоящих из целых чисел, состоящих максимум из 18 цифр.

The Monte Carlo integrator and the histogram of the normal distribution

```
##### historgam.m #####
# Here 100000 is the size of a random
sample. This parameter is passed
# in funk. mcintgrv (Monte-Carlo Integral Vector)

for i=1:10000
s(i) = 0.5 * mcintgrv("sin", 0, pi, 100000);
endfor
```

```

# A histogram is being built, 30 bars.

hist(s, 30, 1)

## End of file historgam.m

##### mcintgrv.m #####
#
# function I = mcintgrv(fun, a, b, mloops)
#
function I = mcintgrv(fun, a, b, mloops)

# This function can be passed to
# any other function by reference
# The main thing is that it should be continuous
# took positive values
# in the interval [a,b]

# Find the maximum value
of x = linspace(a,b);
f = feval(fun,x);
maxf = max(f);

# Generating random arrays of "raindrops"
r1 = rand(mloops,1);
r2 = rand(mloops,1);

# We get an array of random values of x and y
# for raindrops (x,y) falling
# per rectangle [a,b] x maxf
l = b - a;
x = a + l.*r1;
y = maxf.*r2;
fx = feval(fun, x);

# Counting the number of points lying
under the graph, counter fx = feval(fun, x)
# Finding the integral
I = counter/mloops*maxf*l;
endfunction

### End of the file mcintgrv.m

```

The code above is [Han11] of the vectorized `mcintgrv` (Monte-Carlo Integral Vector) function, which is called with arguments.

[Han11]: Hansen (2011), GNU Octave Beginner's Guide

This code was created on GnuOctave (analogue MathCad) under the GNU GPL license. It consists of two files `historgam.m` and `mcintgrv.m`. The first code allows you to build a histogram of the probability density distribution for a randomly generated sample from a dataset of 100,000 integral values.

In the `mcintgrv` file, the integral is calculated using the Monte Carlo method. The method is applicable to an arbitrary function that is positive for a given range of values. It involves calculating the proportion of evenly falling "raindrops" (or sprayed with a spray paint) that settled under the curve, compared with the total number of drops (paint) per rectangle constructed in the range of values of the function along the abscissa axis and from zero to the maximum of the function along the ordinate axis $[a, b] \times \max f$. The fraction thus obtained is equal to the ratio of the area under the curve, which represents the desired integral, to the elementary calculated area of the rectangle. This is based on the uniform distribution of random points (x, y) . The Monte Carlo method is especially effective for numerical integration in n-dimensional space.

The code is easy to understand. Special attention should be paid to performing a comparison between the value of the function and the value of the ordinate y of a random point. The result of this comparison operation is a logical array that returns the indexes of all true elements in the array. By extracting the number of indexes, it is simple to count the number of randomly generated pairs of values (x, y) , which are located under the graph of the function.

Coution Watch ou step

Instead of a smooth decrease in the tails of the histogram on the left and right, a stepwise break is observed. The histogram obtained by modelling illustrates the discreteness factor of the phase space. As the scale increases vertically, the frequencies become integers.

On the author's laptop, the vectorized version of the Monte Carlo integrator performs about 300 times faster than the "normal" numerical integration method. Using vectorized programming, you can also avoid a lot of loops that perform

Try running this code in GnuOctave or its analogues, change the sample size from 100,000 to 10,000, 1000, 100, and vary the number of intervals in the hyptogram. These numerical experiments will allow us to directly check how the standard deviation σ of a random variable depends on the sample size relative to its mathematical expectation.

trivial tasks and clutter up the code. Vectorized code is much easier to perceive and debug.

So, the number of particles in a gas, as well as entropy, are additive quantities, the formula (13.7, 13.10) is also suitable for estimating entropy fluctuations. To do this, it is enough to mentally set up an experiment to divide the initial vessel into N equivalent vessels (in the case of a mixture of gases, this operation should be performed without separating molecules of different gases, which would lead to a change in entropy), while N is a sufficiently large number, at the same time much smaller than the Avogadro number / number of molecules in the system. Instead of the average number of particles, the entropy value must be substituted.

It is easy to show that this conclusion is equivalent to another representation of the defect q_{max} , $max(A, B, C) < K(\epsilon)rad(A, B, C)^{1+\epsilon}$, where $K(\epsilon)$ is a certain constant that depends only on ϵ .

There is a clear contrast between the difficult-to-verify five-hundred-page proof of the "Western version" of ABC-conjecture by Shinichi Mochizuki, a mathematician from Kyoto University [Moc21] and the above proof aimed at high school students and senior students.

[Moc21]: Mochizuki (2021), «Mochizuki's proof of ABC-conjecture.»

Instead of using supercomputers and distributed computing resources, it is easy to create a sample of a normal distribution of one hundred to one hundred thousand units and in half a second to thirty seconds get a more meaningful result using the GnuOctave cross-platform application (an analogue of MathLab under the GnuGPL license), even far from a new desktop computer. - There is a conservation of intellectual and energy resources.

15 Prime numbers as the metalanguage of the Universe

The conclusion of the canonical Gibbs distribution was made on the basis of an equally probable distribution over all microcanonical states of the system, the probability of finding a complex system 1-2 equal to the product of the probabilities of its subsystems 1 and 2: $\rho_{12} = \rho_1 \cdot \rho_2$, which makes it convenient to work with logarithms

and allows one to operate with additive variables. Additive functions for homogeneous quantities are the basis for a set of natural numbers, for countable sets and for the production of arbitrary measurements $\Rightarrow$ measurability of distances, introduction of the concepts of metrics and measures. The properties of the microcosm determine the properties of the macrocosm $\Rightarrow$ The operation of multiplication is primary to the operation of addition/subtraction. From the above positions it is possible to explain the axioms of arithmetic introduced by Giuseppe Peano, as well as the principle of mathematical induction, widely practised in mathematical proofs.

16 The Riemann hypothesis and physics.

The Riemann zeta function allows us to calculate the probability distribution density of the Riemann function $\pi(x)$ already considered by us and has a close connection with physics [Tak11]. The problem, known as the Riemann hypothesis, is one of the most difficult problems in modern mathematics. Its importance for science is so great that every advance in its solution is a significant event. The Riemann hypothesis is one of the seven Problems of the millennium, which have been designated as the "Hilbert Problems" of the XXI century, for the solution of each of which the Clay Mathematical Institute has promised a reward of one million US dollars.

[Tak11]: Takhtadzhian (2011),
Quantum mechanics for
mathematicians

The Riemann hypothesis states that all points at which the zeta function vanishes lie on the same straight line, with the exception of trivial zeros, which are negative even numbers. Due to the rapid development of number theory and cryptography, this statement has acquired important applied significance, in particular, it describes the distribution of prime numbers.

[Rem21]: Remmen (2021),
«Amplitudes and the Riemann
Zeta Function»

Physicists have partially established the relationship between this abstract mathematical problem [Rem21] and a specific physical system — a quantum description of the motion of an electron on a plane under the influence of an electromagnetic field.

17 Summing up

The conclusions drawn can be generalised to a number of subsystems and apply equally to mathematics (foundations of probability theory, logic) and physics. Prime numbers as the metalanguage of the Universe (see Table 1 above).

The answer to the question whether a point belongs to an arbitrary manifold in the studied construction of cuboids $1^n \in A$ or $1^n \notin A$ in phase space should be sought from the point of view of statistical physics / probability theory.

It is logical to determine the logarithm of the probability distribution and obtain an additive value - entropy. The possibility of assigning a subsystem as part of a complex system and the possibility of defining a function allowed the architect of the universe (if there is one, despite the scepticism of atheists) to make the world manageable and knowable, to reduce complex phenomena to simple ones.

The association of prime numbers with logarithmic functions seems perfectly natural. In the course of evolution, the hearing, sight and touch of humans and animals have adapted to the logarithmic law, which allows them to perceive the environment adequately, organically continuing the laws of nature, is a consequence of the law of statistical mechanics and quantum physics, the probability theory.

To illustrate the manifestations of the properties of the microcosm, it is enough to refer to Heisenberg's uncertainty principle $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$, which manifests itself in Fourier transforms, in spectra and in signals: it is impossible to limit the spectrum and the duration of the signal at the same time.

The properties of polynomial rings and linear operators are derived from the properties of prime numbers. Due to the additive properties of entropy, it is possible to reduce the variation of easily measurable quantities: number of particles, energy, temperature, pressure, as the sample increases, and to describe them in simple linear relations. In this way, the relationship between the microcosm and the macrocosm is realised. This relationship obeys the laws of mathematical statistics (statistical physics). It is noteworthy that literally from the very first classes, children study phenomena based

on quantum nature, the fundamental laws of our universe: symmetry, uniformity of space, isotropy, etc.

To summarise the above, it can be argued that the absence of prime numbers would change our universe beyond recognition. Would it be possible for a sane person to live in a world without prime numbers?

Борьба с предубеждениями

1 Введение	286
2 Цель социологического исследования . . .	288
3 Популярная американская пресса vs РИНЦ	291
4 Мораль и наука . . .	292
5 Общеизвестные, но ложные теории . . .	293
6 Мораль стран Объединенного Запада .	295
7 Метаязык Вселенной	300

В десятилетие науки и техники необходимо стимулировать интерес школьников и студентов к точным наукам. «Открытие по плечу каждому студенту и старшекласснику!» - именно этот посыл стремится донести автор до любознательной молодежи и дерзких российских ученых. Там, где Американской науке потребовалось 140 стр. на поиск доказательства Великой теоремы Ферма, за что Эндрю Уайлсу присудили Абелевскую премию в 2016 году - Российской науке оказывается достаточно лишь полстраницы либо шести граней деревянного кубика для творческого развития ребёнка.

1 Введение

Указ Президента РФ от 25 апреля 2022 г. N 231 "Об объявлении в Российской Федерации Десятилетия науки и технологий" в числе прочих задач предусматривает повышение доступности информации о достижениях и перспективах российской науки для граждан Российской Федерации (литера в п. 2.). Важно отметить, что наряду с Великой теоремой Ферма существует также Малая теорема Ферма в теории чисел. Здесь речь идет только Великой теоремой Ферма (Fermat's Last Theorem).

Великая теорема Ферма была сформулирована в 1637г. Пьером де Ферма. При жизни (1601-1665гг) этот французский математик доказательства не опубликовал. Над головоломкой бились сильнейшие остроумные математики мира, но доказательств для всех степеней n не было вплоть до 1994г., когда впервые сэр Эндрю Уайлс, ныне декан математического факультета Принстонского университета США, изложил доказательство на 140 стр., за что автору доказательства Эндрю Уайлсу присудили престижную Абелевскую премию в 2016г. Всё это свидетельствует в пользу сложности научного поиска. Выходит, что Пьер де Ферма сильно преувеличивал, утверждая о найденном им кратком доказательстве?

Однако Российской науке в 2020 г. оказалось достаточно для изложения основных идей доказательства лишь полстраницы либо шести граней деревянного кубика для творческого развития ребёнка и знаний преимущественно в пределах школьной программы, а не громоздких цилиндрических функций, используемых Уайлсом. Тем самым от знаний, используемых узкими специалистами, совершён переход в пользу школьного образования, популярной науки и массового просвещения. Можно ли считать это открытием? Является открытием получение научного результата оригинальным, новым, ранее не известным науке способом — так гласит “Положение об открытиях, изобретениях и рационализаторских предложениях”, утв. постановлением Совета Министров СССР от 21 августа 1973 г. N 584. (действие документа подтверждено решением Верховного Суда РФ от 9 декабря 2015 г. по делу N АКПИ15-1138). Положение действовало до февраля 2021г. и было отменено как устаревший нормативный акт СССР постановлением Правительства РФ № 80. В истории утраты научного суверенитета следует выделить решение от 14 мая 1991г. N 156 Президиума Академии наук СССР, признавшем нецелесообразным сохранение государственной регистрации научных открытий. С вступлением в силу части IV ГК РФ в 2008г. из закрытого перечня объектов интеллектуальной собственности (ст. 1225 ГК РФ) были исключены научные открытия. К сожалению, регистрация научных открытий в современной России, даже в условиях острого военного противостояния, до сих пор осуществляется «на внешнем контуре».

Предубеждение «международного математического сообщества» против изложенного в Главе 2 краткого доказательства ВТФ транслируется некоторыми уважаемыми российскими учеными. Так в деле Верховного суда РФ СИП-947/2022 по спору автора с Роспатентом в связи с отказом в госрегистрации патента на промышленный образец по упомянутой на Рис. 7.4 заявке автора № 2021501435/49 от 20.03.2021, судебные акты были обоснованы с опорой на шесть (!) лженаучных писем и одну ложную экспертизу, где была исследована лишь одна грань из шести, имеющихся у куба, повторены голословные утверждения Роспатента в плагиате приведенного выше доказательства с американской версии, базирующейся на [цилиндрических функциях](#). Отказ в регистрации был сделан Роспатентом под надуманным предлогом «наруше-

ния общественной морали и нравственности», вероятнее всего Западной морали, исключающей развитие России, как суверенного государства. Заметим, что морально-этические споры не подсудны Суду по интеллектуальным правам — нарушение п. 1. ст. 47 Конституции РФ. Сам промышленный образец экспертами даже не исследовался, доказательство, выгравированное лазером на кубе «не заметили», публикации, монографии в РИНЦ отрицались как «не солидные», критиковался «слишком простой английский». Такая откровенно заискивающая, прозападная позиция ученых далеко отступает от объективности и научности - ст. 14 ФЗ N 127-ФЗ "О науке и государственной научно-технической политике".

30 мая 2024 своим определением Конституционный суд РФ отказал автору в рассмотрении его жалобы, касающейся обнаружившейся неопределенности по вопросу соответствия Конституции РФ пункта 4 ст. 1349 Гражданского кодекса Российской Федерации (ГК РФ) в том конституционно-правовом смысле, в котором результаты интеллектуальной деятельности в научно-технической сфере, отвечающие установленным ГК РФ требованиям к промышленным образцам, оцениваются Роспатент с позиции соответствия общественным интересам, принципам гуманности и морали Западных стран, а не Российской Федерации. Отказывая в рассмотрении жалобы по существу, Конституционный суд, ссылаясь на решение Суда по интеллектуальным правам, пришёл к выводу, что размещенная информация на спорном промышленном образце "способна ввести в заблуждение но одновременно указал на отсутствие конфликта с моралью в данном деле. В чём же состоит такое "заблуждение" в деле? - вопрос риторический.

2 Цель социологического исследования

Социальная проблема: в России, вопреки декларируемой ст. 44 Конституции РФ, нет системы нормативного регулирования научных открытий, реестр открытий нашей страны ведут частные структуры и иноагент Википедия, по непрозрачным тарифам и процедурам. Заострить внимание на этом остром несоответствии, равно как и на

социальном зле ложных экспертиз, нередко становящихся основой трудно отменяемых неправосудных решений (достаточно сделать несложный запрос в поисковике о рецензии на экспертизу и поинтересоваться тарифами, чтобы понять востребованность инструментов по опровержению ложных экспертиз) помог бы яркий прецедент. Так путем анализа был выбран объект исследований — Великая теорема Ферма, «математическая жемчужина», кратко сформулированная, но очень сложно доказанная. Существуют ли «олимпиадные» способы доказательства? [Вор+88] Обнадеживало автора озарение самого Пьера де Ферма, утверждавшего ещё в 1637г., что он «нашёл воистину чудесное доказательство, но поля [Арифметики Диофанта] здесь слишком узки, чтобы вместить его!». Это подсказало направление поиска — парадокс, минимальное количество формул, а значит необходимо искать с позиции геометрии и физики, поскольку в XVII веке наука ещё не была подвержена узкой специализации, активно проводились, выражаясь современным языком, междисциплинарные исследования. Настойчивый поиск завершился нахождением краткого доказательства - но как признать его открытием юридически? Смоделировать спор в этой ситуации в суде по интеллектуальным правам — это один из способов защиты прав, гарантированных ст. 45 Конституции РФ: каждый вправе защищать свои права и свободы всеми способами, не запрещенными законом.

В условиях правовой лакуны (пробела), для создания прецедента в образовании и педагогике, автор был вынужден выжечь лазером своё открытие на гранях деревянного куба и подать заявку в Роспатент о регистрации патента на промышленный образец с доказательством «Великой теоремы Ферма». Отказ в выдаче патента на промышленный образец со стороны Роспатента произошёл более чем через год с обвинением автора в «введении в заблуждение», аморальности и безнравственности. Под этими надуманными предлогами Роспатент приписывает открытие, найденное гражданином России, американской науке, не имеющей никакого отношения к защищаемой ст. 44 Конституции РФ интеллектуальной собственности гражданина Российской Федерации.

Единственным возражением со стороны Роспатент могло бы стать научное опровержение найденного автором до-

[Вор+88]: Воробьев и др. (1988), Задачи по физике

казательства. Поскольку оно опирается преимущественно на школьные знания, провести тщательную проверку может любое лицо с аттестатом школьного образования. Автор и возглавляемый им Союз «Сибирский Центр медиации» многократно объявляли публичное обещание награды — конкурсы с щедрыми призами за научное опровержение краткого доказательства ВТФ, приглашали к диалогу декана математического факультета Принстонского университета США, сэра Эндрю Уайлса по поводу направленного ему авторского доказательства ВТФ (RO153663225RU от 29.02.2020 вручено адресату 17.03.2020 и RA631127263RU от 03.05.2022 - поступило на Таможню США 15.05.2022, затем возвращено в Россию.) — но награда осталась не востребованной, а письма - без ответа.

[Авд20]: Авдыев (2020), «Базы данных для ЭВМ Доказательство теоремы Ферма для Миллиардов на основе школьных знаний 11.03.2020»

По мнению Роспатента, указание имени Заявителя и даты сделанного им математического открытия на изделии и упомянутой заявке «вводит в заблуждение», является «недостоверным», «нарушает принципы общественной морали и нравственности». Но этот одиозный вывод в решении Роспатента противоречит ранее произведенной Роспатентом регистрации базы данных [Авд20], в единственной таблице содержатся строки и изображения с доказательством Великой теоремы Ферма. Автор, как заявитель патента, подал свои возражения на решение Роспатент с учетом административного порядка (п. 2. ст. 1248 ГК РФ) в Палату по патентным спорам. Возражения были отклонены Палатой со ссылкой на экспертизу, которая исследовала лишь одну грань шестигранного куба (!?).

Решение Палаты по патентным спорам Роспатент было оспорено автором в Суд по интеллектуальным правам сначала без соблюдения досудебного порядка, который не является обязательным для научных споров (СИП-947/2022), затем с соблюдением досудебного порядка как потребовал суда (СИП-357/2022) и признанием со стороны Роспатента отсутствие у него компетенции рассматривать научные споры. После неоднократных судебных заседаний председательствующей судья совершил не предусмотренные Арбитражным процессуальным кодексом (АПК РФ) действия, ограничив публикации автора-Заявителя только 2020г. И без обсуждения вопросов со сторонами спора, как вопреки требованиям

АПК РФ и объективному исследованию доказательств [ББ09], направил запрос в десяток научных организаций с формулировкой: являются ли прилагаемые публикации Заявителя доказательством Великой теоремы Ферма? Такая постановка вопроса противоречит правилам формальной логики, поскольку факт публикаций в ряде разных изданий РИНЦ является достоверным (предмет спора - плагиат найденного Заявителем доказательства с иного "общепризнанного" и совершение аморального, безнравственного проступка). Поэтому часть высших учебных заведений и институтов отказались дать ответ под благовидным предлогом отсутствия специалистов в теории чисел. Другие же дали ответы с грубейшим нарушением ст. 14 ФЗ "О науке и государственной научно-технической политике" от 23.08.1996 N 127-ФЗ, научной этики, процессуальных правил [5], а также содержания курсов по основам теории множеств и топологии, изучаемых студентами первых курсов и частично - школьниками физико-математических школ. В этом и заключается новизна доказательства, получение результата ранее неизвестным науке способом. Если Эндрю Уайлс «всё это предвидел ещё в 1994г», то зачем ему понадобилось тратить 140 страниц, там, где достаточно одной?

[ББ09]: Бутель и др. (2009), Правовая статистика: Учебное пособие

3 Популярная американская пресса vs РИНЦ

В этой дилемме выбор Роспатента уверенно склоняется в пользу популярной американской прессы - ведомство прикладывает выдержку из новостей популярной американской науки. В сложившейся практике научные издания, входящие в Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ), не принимаются во внимание, когда задеты интересы американской науки — не случайно эксперт Роспатент ориентировался исключительно на популярную прессу западных изданий в русскоязычном переводе. Такая необъективность и научная сегрегация по принципу гражданства противоречит действующему Российскому законодательству. Необъективность проявляется даже в том, что Роспатент вслед за своим экспертом, во всех своих решениях исследует лишь одну грань из шести деревянного куба - промышленного образца. Остальные грани

не нашли никакого отражения в переписке, экспертизе и оспариваемых решениях Роспатент. Проигнорированы научные публикации, а также научные монографии Заявителя в изданиях РИНЦ и др. Является ли такое игнорирование объективных доказательств со стороны Роспатента научным и объективным? - Вопрос риторический.

4 Мораль и наука

Важно отметить, что с позиции морали Западных стран, прежде всего США, научное развитие России недопустимо. Для иллюстрации: одна из крупнейших мировых баз научных данных Web of Science стала недоступной для российских пользователей. ТАСС цитирует заявление ее владельца — компании [Clarivate](#) — о том, что она «приняла решение закрыть российский офис и прекратить в РФ коммерческую деятельность, пояснив, что причиной этого стала спецоперация на Украине». Западная мораль, идеология отрицает Россию, как суверенное государство. В Указе Президента РФ от 9 ноября 2022 г. № 809 «Об утверждении Основ государственной политики по сохранению и укреплению традиционных российских духовно-нравственных ценностей», где в п. 14. дано определение деструктивной идеологии: «Идеологическое и психологическое воздействие на граждан ведет к насаждению чуждой российскому народу и разрушительной для российского общества системы идей и ценностей.

Указ Президента развивает и конкретизирует более ранние документы

- ▶ отдельные положения Стратегии национальной безопасности РФ
- ▶ Доктрины информационной безопасности РФ
- ▶ Стратегии противодействия экстремизму в РФ до 2025г
- ▶ Стратегии государственной национальной политики РФ на период до 2025г.
- ▶ Основы государственной культурной политики
- ▶ Стратегии развития информационного общества в РФ на 2017-2030гг
- ▶ и др.

Остаётся догадываться, что же из перечисленного инкриминируется автору? В своём решении Роспатент также указывает на пробел в действующем законодательстве: отсутствие в Российской Федерации государственного реестра научных открытий, констатирует, что совместная деятельность РАЕН и МААНОиИ (частных НКО), регистрирующих научные открытия осуществляется вне рамок закона и Конституции РФ. Признавая неудовлетворительное положение дел по государственной регистрации научных открытий в РФ, передачу стратегически важных вопросов для обеспечения безопасности и развития России международному сообществу и частным структурам, Роспатент просто констатирует, что эти вопросы не относятся к его компетенции (дело № 300-ЭС22-11151, № С01-842/2022СИП-357/2022 Верховного суда РФ). Одновременно Палата по патентным спорам, входящая в структуру Роспатента, распространяет свою компетенцию и на научные споры вразрез со ст. 14 ФЗ "О науке и государственной научно-технической политике" от 23.08.1996 N 127-ФЗ. Вместо ссылки на реестр научных открытий Роспатент почему-то ссылается на портал информационного агентства ТАСС, так же не имеющий отношения к государственному реестру научных открытий, не упоминался в ст.44 Конституцией РФ, равно как и в действовавшем на момент подачи обращения автора в Роспатент "Положении об открытиях, изобретениях".

До начала обострения идеологического и военного противостояния Россия - США общепринято было считать российскую науку органически интегрированной в общемировую. Главное возражение Роспатента — доказательство автора противоречит **общеизвестному доказательству** и мнению международного математического сообщества (такое мнение формируется прежде всего в США, как «щедрого грантодателя»). -

5 Общеизвестные, но ложные теории

Является ли «общеизвестность» критерием научной истины? - Ответ отрицательный. История науки изобилует примерами общеизвестных ложных теорий. В эпоху Классического Средневековья на уровне религиозных

[Изу18]: Изуткин (2018), «Эпидемии в эпоху классического средневековья в Европе»

[Пто+98]: Птолемей и др. (1998), Альмагест: или математическое сочинение в тринадцати книгах

[КЖ22]: Караваева и др. (2022), «ЗЕЛЕННЫЕ ФИНАНСЫ РОССИИ»

представлений и общественного сознания эпидемии воспринимались как божественная кара за различные отступления от религиозных канонов, в частности, отход от догматов церкви, попытки рационального познания мира, вероотступничество [[Изу18]].

Руки и хирургические инструменты обрабатывали не перед, а после операций. Другой пример общепризнанного доказательства: геоцентрическая система мира представление об устройстве мироздания, согласно которому центральное положение во Вселенной занимает неподвижная Земля, вокруг которой вращаются Солнце, Луна, планеты и звёзды [[Пто+98]].

Эта ложная теория просуществовала 1400 лет, пока не была опровергнута польским астрономом Николаем Коперником, разработавшим теорию движения планет вокруг Солнца на основании принципа Пифагора о равномерных круговых движениях (трактат «О вращениях небесных сфер», издан 1543г.), и далее были открыты Законы Кеплера, законы Ньютона. Более свежий пример общепризнанного [КЖ22], но ложного доказательства — переоценка роли зеленой энергетики, как альтернативы традиционной энергетике. В результате волюнтаристских решений стран объединенного Запада цены на газ выросли более, чем в десять раз (!) . . . “без углеводородов, без резервов, максимальный уровень, до которого можно довести восстанавливаемую энергетику, — это максимум 30 процентов от общего энергобаланса», — считает доцент Финансового университета при Правительстве России Леонид Крутаков [Интервью в ЛентеРУ <https://lenta.ru/news/2022/01/12/zeleneg/> на 09.02.23]. Среди общепризнанных ошибочных истин особенно хочется выделить спор вокруг устья Амура и о. Сахалин. До середины XIX века общепризнанным было убеждение ряда ученых, мореплавателей, государственных деятелей о непригодности р. Амур для судоходства среди них: Русский мореплаватель, возглавлявший первое русское кругосветное плавание И. Ф. Крузенштерн, председатель совета директоров Российско-Американской компании барон П. Н. Врангель, офицер Российского императорского флота, исследователь Охотского моря А. М. Гаврилов, министр иностранных дел К. В. Нессельроде. Вслед за перечисленными авторитетами Император Всероссийский Николай I считал, что река Амур непригодна для су-

доходства, теряется в песках и с, подачи Нессельроде, запретил адмиралу русского флота Г.И. Невельскому исследовать устье Амура под предлогом экономии средств казны, сохранения Кяхтинской чайной торговли с Китаем, соблюдения баланса отношений с Англией и США на Дальнем Востоке. И лишь в 1849-1851гг. Геннадий Иванович Невельской, послушавшись приказа, опроверг это заблуждение, исследовав Амурский лиман. Заслугой русского адмирала стало присоединение к нашей стране обширных дальневосточных земель и острова Сахалин, а не полуострова, как это ранее ошибочно считали упомянутые авторитеты [[Зад69]].

История науки изобилует подобными примерами.

Автор обратился в Конституционный суд с просьбой защитить принципы гуманности и морали не Западных стран, а России в патентуемом изделии. Дело в том, что на обычном деревянном кубике гражданин выжиг лазером доказательство Великой теоремы Ферма. Роспатент оказал в госрегистрации промышленного образца, потому что найденное россиянином доказательство противоречит общепринятому док-ву гражданина США, на 140 стр. Роспатент потребовал удалить имя гражданина РФ под краткой версией его доказательства, а также отказал в госрегистрации промобразца под предлогом нарушения общественной морали и нравственности. Вопрос заключается в том, чья мораль подразумевается?

6 Мораль стран Объединенного Запада

Мораль стран Объединенного Запада и России в корне различны.

С началом специальной военной операции Запад отбросил дипломатические уловки. Западная мораль в ряде случаев отрицает веру в Бога, придерживается культа Сатаны, пропагандирует, дьяволопоклонничество, гомосексуализм, отрицает брак, как союз мужчины и женщины, пропагандируется индивидуализм, допускаются ложь и лицемерие, как средство достижения целей, и т. д. Всё это указывает на закат западной Цивилизации [[Шпе10]]. Для иллюстрации, когда нашумевшая по всему миру выставка трупов профессора Гюнтера фон Хагенса дошла и

[Зад69]: Задорнов (1969), Первое открытие. К океану.

Система духовных и моральных ценностей приобретает решающее значение в условиях развязанной Западом когнитивной войны, бурного развития информационно-коммуникационных технологий, визуализации, трёхмерного моделирования и печати, легко преодолевающей государственные границы.

[Шпе10]: Шпенглер (2010), закат Европы

до России, РПЦ выступила против такого «бесстыдства», указывая не на негативное влияние на нравственность, отсутствие научного и воспитательного значения расчлененных человеческих трупов в том виде, как это представляет Гюнтер фон Хагенс.



Рис. 6.1: Анатомические модели Гюнтера фон Хагенса по прозвищу

Наука, воспитание и образование базируются на духовно-нравственных ценностях. Так, Федеральный закон от 5 июля 1996 г. N 86-ФЗ "О государственном регулировании в области генноинженерной деятельности" определяет механизмы, обеспечивающие безопасность граждан и окружающей среды в процессе осуществления генно-инженерной деятельности и использования ее результатов. Принят Федеральный закон от 20 мая 2002 г. N 54-ФЗ "О временном запрете на клонирование человека исходя из принципов уважения человека, признания ценности личности, необходимости защиты прав и свобод человека и учитывая недостаточно изученные биологические и социальные последствия клонирования человека.

Другой пример: указ Президента РФ от 10 октября 2019 г. N 490 "О развитии искусственного интеллекта в РФ" (с изменениями и дополнениями) определяют понятия доверенные технологии искусственного интеллекта, отвечающие стандартам безопасности, разработанные с учетом принципов объективности, недискриминации, этичности, исключающие при их использовании возможность причинения вреда человеку и нарушения его основополагающих прав и свобод, нанесения ущерба интересам общества и государства [[Авд23]].

[Авд23]: Авдыев (2023), «Великая головоломка, как индикатор суверенизации Российской науки»

Можно продолжать эти примеры с учетом законодательства регулирующего обращения с радиоактивными материалами и ядерным оружием и мирным атомом в энергетике, но изложенного достаточно для вывода:

результаты интеллектуальной деятельности в научно-технической сфере, включая промышленные образцы, должны оцениваться по шкале духовно-нравственных ценностей Российской Федерации, морали нашей страны. Система духовных и моральных ценностей приобретает решающее значение в условиях развязанной Западом когнитивной войны, бурного развития информационно-коммуникационных технологий, визуализации, трёхмерного моделирования и печати, легко преодолевающей государственные границы.

Действующая редакция п. 4 ст. 1349 ГК РФ не содержит указания на общественную мораль и нравственность с позиции ценностей Российской Федерации. В результате такой в деле 300-ЭС23-19598 (СИП-947/2022) Верховного Суда РФ спор разрешен с опорой на предубеждения международного математического сообщества, постулирования вторичности российской науки и отрицание ее научного суверенитета.

Как указание имени российского гражданина (ст. 21 Конституции РФ) под найденным им доказательством ВТФ (ст. 44, 75.1 Конституции РФ) может противоречить российской общественной морали и нравственности? - вопрос риторический. В всех перечисленных делах нет научной экспертизы в том процессуальном порядке, как это предусматривает процессуальный кодекс: формулировка вопросов, выбор экспертного учреждения, предупреждение эксперта об уголовной ответственности, сведения о квалификации эксперта и специализации. Научные организации, с которым СИП провел «неформальное интервью», даже не получили спорного патентуемого изделия. Четыре из десяти опрошенных таким образом научных организации по соображениям этики воздержались от ответа на логически некорректно сформулированный закрытый вопрос: содержится ли в приглашаемой публикации Авдыева М.А. доказательство ВТФ? Ответ на такой вопрос может быть: Да либо Нет.

Но забыв о научной и элементарной этике, шесть научных организаций наперебой принялись очернять доказательство ВТФ Заявителя, подменяя обсуждаемый тезис, путая научную терминологию. Не обошлось без ответов в анонимном формате.

Научные открытия имеют общемировое и, в данном деле, культурное и историческое значение с позиции педагогики и образования, поскольку «неразрешимая» с 1637 г. Великая теорема Ферма в 2020г., связующая времена Диофанта Александрийского (III век НЭ, Эпохи Просвещения (XVII век) и современность (цифровизация и 3D моделирование XXI век) была впервые доказана средствами школьной программы в краткой форме. В условиях обострённого противостояния коллективного Запада с Россией, краткое доказательство ВТФ, относимой к «математическим жемчужинам», имеет важное культурное и историческое значения. Доказательство Заявителя подрывает гегемонию США и «красоту» найденного профессором Лиги Плюща, проф. Принстонского университета, декана мат. Факультета Эндрю Уайлса ста с лишним страничного доказательство, за которое ему была присуждена Абелевская премия в 2016г. Но поиск Истины не останавливается с присуждением самых престижных наград и премий. И этот принцип также является продолжением разделяемых Российской Федерацией духовно-нравственных ценностей: постоянное развитие личности и социальных институтов, многополярный мир, безбарьерная среда, общество равных возможностей и т.д.

Указ Президента РФ от 25.04.2022 № 231 "Об объявлении в Российской Федерации десятилетия науки и технологий" подчеркивает значимость научно-технологического развития страны и среди прочих задач ставит повышение доступности информации о достижениях и перспективах российской науки для граждан Российской Федерации (литера в п. 2 Указа). С этих позиций краткое доказательство Заявителя демонстрирует каждому школьнику приоритет и достижения российской науки, а поэтому имеет важные публично-правовые последствия для науки, педагогики, укрепления российской морали лидирующего государства в сферах образования, науки и техники. Этот Указ развивает ст. 34 Конституции РФ: Каждый имеет право на свободное использование своих способностей и имущества для предпринимательской и иной не запрещенной законом экономической деятельности.

Говоря о вторичности Российской науки, Заявитель отмечает идеологические предпосылки, также вытекающие из морали и системы ценностей. Ещё в 1991 г. Президи-

ум Академии наук СССР признал «нецелесообразным» сохранение государственной регистрации научных открытий (решение от 14 мая 1991 г. N 156). Изъятие интеллектуального результата в вида научного открытия под предлогом «нецелесообразности» было предпринято Российским государством в период больших ожиданий от интеграции нашей страны в международное научное сообщество и разделение труда. Но как убедительно показала специальная военная операция, такие ожидания оказались иллюзорными.

В Десятилетие науки и технологий вопрос защиты интеллектуального потенциала требует особого внимания. Достаточно указать на уязвимость п. 5. ст. 1259 ГК РФ: Авторские права не распространяются на. . . открытия, убедиться в отсутствии Закона об открытиях, преемника Государственного комитета по изобретениям и открытиям при ГКНТ СССР государственной услуги по регистрации научной открытий.

Пункт 1. ст. 44 Конституции РФ гласит Каждому гарантируется свобода литературного, художественного, научного, технического и других видов творчества, преподавания. Интеллектуальная собственность охраняется законом. Из имеющихся в деле научных публикаций и монографий из перечня РИНЦ математическое открытие было сделано автором в начале 2020г., и на тот момент регулировалось Постановлением Совета Министров СССР от 21 августа 1973 г. N 584 "Об утверждении Положения об открытиях, изобретениях и рационализаторских предложениях".

Простое доказательство имеет более высокую научную ценность: «не изобретайте сущности сверх необходимости» (Уильям Оккам). Надписи на изделии согласно заявке на патентуемый промышленный образец автора не нарушают прав других лиц и публичные интересы, а напротив соответствуют общественным интересам, принципам гуманности и морали в той мере, в которой этому способствует образование и просвещение. С 2021г. Гиперкуб деревянный 3D на сборной подставке с доказательством Великой теоремы Ферма был размещен Союз Сибирский Центр медиации автором на маркет-плейсе, как развивающий сувенир для школьников, студентов и любознательной молодежи. Этот сувенир подарен автором ряду библиотек и университетов России.

Не изобретайте сущности сверх необходимости.
Философ Уильям Оккам.

7 Метаязык Вселенной

Трудно переоценить место простых чисел в физических законах, определяющих окружающий материальный мир и, в широком смысле, нашу Вселенную. Изложенный выше материал уже показал связь простых чисел с квантовой механикой, статистической физикой и вытекающей из неё теории вероятностей. См.таблицу (2.1).

[Хар62]: Харкевич (1962),
Спектры и анализ

Для наглядной иллюстрации проявлений свойств микромира достаточно сослаться на принцип неопределённости Гейзенберга $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$, проявляющихся в преобразованиях Фурье, в спектрах и сигналах: невозможно одновременно сузить полосу спектр и длительность сигнала - см. подробный пример в ([Хар62]).

[Деп65]: Депман (1965), Исто-
рия арифметики

Именно простые числа позволяет вместе связать систему, надсистему и подсистему. Вывод канонического распределения Гиббса был сделан исходя из равновероятного распределения по всем микрокананоческим состояниям системы, вероятности нахождения сложной системы 1-2 равной произведению вероятностей её подсистем 1 и 2: $\rho_{12} = \rho_1 \cdot \rho_2$, что обуславливает удобство работы с логарифмами и позволяет оперировать с аддитивными переменными. Аддитивные функции для однородных величин — это основа для ряда натуральных чисел, для счетных множеств и производства любых измерений => измеримость расстояний, ввод понятий метрики и меры. Свойства микромира определяет свойства макромира. => операция умножения является первичной в сравнении с операцией сложения / вычитания. С изложенных позиций можно объяснить аксиомы арифметики, введенных Джузеппе Пеано а также принцип математической индукции, широко практикуемый в математических доказательствах. см. [Деп65].

Сделанные выводы могут быть обобщены на целый ряд подсистем и в равной мере относятся как к математике (основы теории вероятности, логики), так и физике. Логично при этом определить логарифм от распределения вероятности и получить аддитивную величину — энтропию. Возможность выделения подсистемы в составе сложной системы и возможности задания функции позволили Архитектору Вселенной (если таковой существует

даже вопреки скепсису атеистов) сделать мир управляемым и познаваемым, редуцировать сложные явления к простым.

Связь простых чисел с логарифмическими функциями представляется совершенно естественной. В ходе эволюции слух, зрение, осязание человека и животных адаптировались к логарифмическому закону, что позволяет адекватно воспринимать окружающую среду, органично продолжает законы природы, является следствием закона статистической механики и квантовой физики, теории вероятности. Легко подсчитать следы статистических матрицы, где на диагоналях расположен усреднённый логарифм вероятности - всё основано на принципе симметрии (усреднение), возможности выделения, обособления частного из целого различия между взаимосвязью и взаимодействием [Сел03].

[Сел03]: Селиванов (2003), Поиск ошибочного и правильного

А роль симметрии/асимметрии в нашей жизни ещё как следует не осознана, по крайней мере Западной наукой. Свойства колец многочленов и линейных операторов являются производными от свойств простых чисел. Благодаря аддитивным свойствам энтропии можно добиться уменьшения флуктуации легко измеримых величин: числа частиц, энергии, температуры, давления, по мере увеличения выборки и описать его простыми линейными соотношениями. Так реализуется связь микромира с макромиром. Эта связь подчиняется законам математической статистики (статистической физики). см. также интересную популярную книгу [Пон86].

[Пон86]: Понтрягин (1986), Обобщения чисел

Простые числа - метаязык Вселенной.

Поражает тот обстоятельство, что буквально с первых классов школьники изучают явления, в основе которых обнаруживается квантовая природа, фундаментальные законы нашей Вселенной: симметрия, однородность пространства, изотропность и т.д. Если математику наывают языком Вселенной, то простые числа - это метаязык Вселенной.

В этом смысле простые числа пришли к нам из зарождения Вселенной, это реликты от Большого взрыва! Это метаязык или по Станиславу Лемму *His Master's Voice*. (Глас Господний) - На Земле, пожалуй, нет такого взрос-

лого, который не умеет считать и молиться, но далеко не каждый способен услышать...

Чтобы лучше почувствовать то удивление, которое испытывает автор, представьте себе мир без простых чисел, где любое число имеет сколько угодно делителей, где невозможно выделить часть из целого, где каждое явление нередуцируемо до более простых. Именно о таких явлениях упоминает Роджер Пенроуз в своей книге [Пен05].

[Пен05]: Пенроуз (2005), Тени разума в поисках науки о сознании

Дискретность генетического кода, заключающееся в том, что данный нуклеотид может входить в состав только одного кодона - это ещё один пример важности обособленности части из целого.

Подытоживая изложенное, можно утверждать, что если бы простых чисел не было, то это изменило бы нашу Вселенную до неузнаваемости. Возможно ли было бы зарождение в мире без простых чисел человека разумного?

Важно отметить, что система может обладать свойствами эмерджентности (англ. от «возникающий, неожиданно появляющийся») качественно новыми, не присущими её компонентам по отдельности.

В социальной сфере большой интерес представляет **сверхаддитивный эффект** (т.е. «превосходящий сумму»), имеется в виду дополнительная прибавка в продуктивности групповой работы, превосходящая сумму вкладов отдельно друг от друга. Для таких случаев изложенный выше подход должен быть дополнен качественно новыми методами. Но такие сложные явления не входят в предмет исследования. Более подробно о проблеме синергии см. например в [Кре21].

[Кре21]: Крейк (2021), «Некоторые теоретико-методологические основы рассмотрения синергии в социуме»

Поскольку любые дерзкие попытки на продолжение научного поиска кратких доказательств ВТФ встречали сопротивление, автор был вынужден продолжить научную работу над АВС-гипотезой, из которой вытекает ряд интересных следствий, включая саму ВТФ. Обе теоремы оказались связаны благодаря общим принципам, заложенным при формировании нашей Вселенной.

И хочется завершить эту главу цитатой:

«Две вещи наполняют душу постоянно новым, возрастающим удивлением и благоговением: звёздное небо надо мной и нравственный закон во мне. То и другое, как бы покрытые мраком или бездною, находящиеся вне моего горизонта, я не должен исследовать, а только предполагать. Я вижу их перед собой и непосредственно связываю их с сознанием своего существования...»

Иммануил Кант.

Fighting prejudice

1	Introduction	306
2	Purpose of the sociological research	307
3	Popular American Press vs RSCI	310
4	Morality and Science	310
5	Generally accepted but false theories . .	312
6	Protection of rights through the Constitutional and Supreme Courts . . .	314
7	In the interest of humanity and morality of Russia .	314
8	The morality of the countries of the United West	319
9	Morality. Scientific objectivity	321
10	Scientific discoveries are of global importance	322
11	The response of the Constitutional Court	323
12	Don't invent entities beyond necessity . .	325
13	The Metalanguage of the Universe	325
14	Conclusion. Prime numbers as metalanguage of universe	325

In the decade of science and technology, it is necessary to stimulate the interest of schoolchildren and students in the exact sciences. "Every student and high school student can make a discovery! this is exactly the message the author seeks to convey to curious young people and daring Russian scientists. Where American science needed 140 pages. in search of a proof of Fermat's Great Theorem, for which Andrew Wiles was awarded the Abel Prize in 2016, Russian science finds that only half a page or six faces of a wooden cube are enough for the creative development of a child.

1 Introduction

Decree of the President of the Russian Federation No. 231 dated April 25, 2022 "On the announcement of the Decade of Science and Technology in the Russian Federation among other tasks, provides for increasing the availability of information about the achievements and prospects of Russian science for citizens of the Russian Federation (letter in paragraph 2.). It is important to note that along with Fermat's Great Theorem, there is also a Small Theorem Fermat in number theory. Here we are talking only about Fermat's Last Theorem.

Fermat's Last theorem was formulated in 1637. By Pierre de Fermat. During his lifetime (1601-1665), this French mathematician did not publish the proof. The world's strongest witty mathematicians fought over the puzzle, but there was no proof for all degrees of n until 1994, when for the first time Sir Andrew Wiles, now dean of the Mathematics Department at Princeton University in the USA, presented the proof on 140 pages, for which the author of the proof, Andrew Wiles, was awarded the prestigious Abel Prize in 2016. All this testifies in favor of the complexity of the scientific search. Does it turn out that Pierre de Fermat was greatly exaggerating when he claimed to have found a brief proof?

However, in 2020, it turned out to be enough for Russian science to present the main ideas of the proof of only half a page or six faces of a wooden cube for the creative development of a child and knowledge mainly within the school curriculum, and not the bulky cylindrical functions used by Wiles. Thus, a transition has been made from the knowledge used by narrow specialists in favor of school education, popular science and mass education. Can this be considered a discovery? It is a discovery to obtain a scientific result in an original, new, previously unknown to science way — so says the “Regulation on Discoveries, Inventions and innovation proposals”, approved by Resolution of the Council of Ministers of the USSR dated August 21, 1973 No. 584. (the validity of the document was confirmed by the decision of the Supreme Court of the Russian Federation dated December 9, 2015 in the case N AKPI15-1138). The regulation was in effect until February 2021 and was abolished as an outdated normative act of the USSR by Decree of the Government of the Russian Federation No. 80. In the history of the loss of scientific sovereignty, the decision of May 14, 1991 should be highlighted. No. 156 of the Presidium of the USSR Academy of Sciences, which recognized the inexpediency of maintaining the state registration of scientific discoveries. With the entry into force of Part IV of the Civil Code of the Russian Federation in 2008, scientific discoveries were excluded from the closed list of intellectual property objects (Article 1225 of the Civil Code of the Russian Federation). Unfortunately, the registration of scientific discoveries in modern Russia, even in conditions of acute military confrontation, is still carried out "on the outer contour".

2 Purpose of the sociological research

Social problem: in Russia, contrary to the declared Article 44 of the Constitution of the Russian Federation, there is no system of regulatory regulation of scientific discoveries, the register of discoveries of our country is maintained by private structures and foreign agencies, according to opaque tariffs and procedures. A vivid precedent would help to focus attention on this acute discrepancy, as well as on the social evil of false examinations, which often become the basis for difficult-to-reverse unlawful decisions (it is enough to make a simple search engine query about an examination

review and ask about tariffs in order to understand the demand for tools to refute false examinations). Thus, through analysis, the object of research was chosen — Fermat's Great Theorem, a "mathematical pearl briefly formulated, but very difficult to prove. Are there "Olympiad" proof methods? The author was encouraged by the insight of Pierre de Fermat himself, who claimed back in 1637 that he had "found a truly wonderful proof, but the fields [of Diophantus' Arithmetic] here are too narrow to accommodate it!". This prompted the direction of the search — a paradox, a minimum number of formulas, which means that it is necessary to search from the perspective of geometry and physics, since in the XVII century science was not yet subject to narrow specialization, interdisciplinary research was actively carried out, in modern terms. The persistent search ended with the finding of a brief proof - but how can it be legally recognized as a discovery? To simulate a dispute in this situation in an intellectual property court is one of the ways to protect the rights guaranteed by Article 45 of the Constitution of the Russian Federation: everyone has the right to defend their rights and freedoms in all ways not prohibited by law.

[Авд20]: Авдыев (2020), «Базы данных для ЭВМ Доказательство теоремы Ферма для Миллиардов на основе школьных знаний 11.03.2020»

In the context of a legal lacuna (gap), in order to create a precedent in education and pedagogy, the author was forced to burn his discovery with a laser on the edges of a wooden cube and apply to Rospatent for registration of a patent for an industrial design with proof of Fermat's "Great Theorem" [Авд20]. The refusal to grant a patent for an industrial design by Rospatent occurred more than a year later, accusing the author of "misleading immorality and immorality. Under these far-fetched pretexts, Rospatent attributes the discovery found by a Russian citizen to American science, which has nothing to do with the intellectual property of a citizen of the Russian Federation protected by Article 44 of the Constitution of the Russian Federation.

The only objection from Rospatent could be a scientific refutation of the evidence found by the author. Since it is based mainly on school knowledge, any person with a school education certificate can conduct a thorough check. The author and the Union "Siberian Mediation Center" headed by him have repeatedly announced a public promise of awards — contests with generous prizes for the scientific refutation of a brief proof of FLT, invited the Dean of the Faculty of Mathematics of Princeton University, Sir

Andrew Wiles, to a dialogue about the author's proof of FLT sent to him (RO153663225RU dated 02/29/2020 handed to the addressee 03/03/2020 and RA631127263RU dated 05/03/2022 - received to US Customs on 05/15/2022, then returned to Russia.) — but the award was not in demand, and the letters remained unanswered.

According to Rospatent, the indication of the Applicant's name and the date of his mathematical discovery on the product and the mentioned application is "misleading is "unreliable "violates the principles of public morality and morality". But this odious conclusion in Rospatent's decision contradicts the database registration previously carried out by Rospatent [3], the only table contains rows and images with a proof of Fermat's Great Theorem. The author, as the patent applicant, filed his objections to the decision of Rospatent, taking into account the administrative procedure (paragraph 2. art. 1248 OF the Civil Code of the Russian Federation) to the Chamber for Patent Disputes. The objections were rejected by the Chamber with reference to the examination, which examined only one face of the hexagonal cube (!?).

The decision of the Rospatent Patent Dispute Chamber was challenged by the author to the Intellectual Property Rights Court, first without observing the pre-trial procedure, which is not mandatory for scientific disputes (SIP-947/2022), then in compliance with the pre-trial procedure as required by the court (SIP-357/2022) and recognition by Rospatent of its lack of competence to consider scientific disputes. After repeated court sessions, the presiding judge committed actions not provided for by the Arbitration Procedural Code (APC RF), limiting the publications of the Applicant author only in 2020. And without discussing issues with the parties to the dispute, as contrary to the requirements of the Agro-industrial Complex of the Russian Federation and objective examination of evidence [BP09], sent a request to a dozen scientific organizations with the wording: are the attached publications of the Applicant a proof of Fermat's Great Theorem? Such a statement of the question contradicts the rules of formal logic, since the fact of publications in a number of different publications of the RSCI is reliable (the subject of the dispute is plagiarism of evidence found by the Applicant from another "generally recognized" and the commission of immoral, immoral misconduct). Therefore, some higher educational institutions and institutes refused

[BP09]: Bugel и др. (2009),
Legal Statistics: Textbook

to give an answer under the plausible pretext of the lack of specialists in number theory. Others gave answers in gross violation of Article 14 of the Federal Law "On Science and State Scientific and Technical Policy" dated 08/23/1996 N 127-Federal Law, scientific ethics, procedural rules, as well as the content of courses on the basics of set theory and topology studied by first-year students and partially by students of physics and mathematics schools. This is the novelty of the proof, obtaining a result in a way previously unknown to science. If Andrew Wiles "foresaw all this back in 1994," then why did he need to spend 140 pages where one is enough?

3 Popular American Press vs RSCI

In this dilemma, Rospatent's choice confidently leans in favor of the popular American press - the agency applies an excerpt from the news of popular American science. In current practice, scientific publications included in the Russian Science Citation Index (RSCI) are not taken into account when the interests of American science are hurt — it is no coincidence that the Rospatent expert focused exclusively on the popular press of Western publications in Russian translation. Such bias and scientific segregation based on the principle of citizenship contradicts the current Russian legislation. Bias is manifested even in the fact that Rospatent, following its expert, in all its decisions examines only one face out of six wooden cubes - an industrial design. The remaining facets were not reflected in the correspondence, expertise and contested decisions of Rospatent. Scientific publications, as well as the Applicant's scientific monographs in the publications of the RSCI and others, were ignored. Is such disregard of objective evidence by Rospatent scientific and objective? - The question is rhetorical.

4 Morality and Science

It is important to note that from the moral standpoint of Western countries, primarily the United States, Russia's scientific development is unacceptable. To illustrate: one of the world's largest scientific databases, Web of Science, has become inaccessible to Russian users. TASS quotes a

statement from its owner, the company [Clarivate](#), that it "decided to close the Russian office and stop commercial activities in the Russian Federation, explaining that the reason for this was a special operation in Ukraine." Western morality and ideology denies Russia as a sovereign state. In the Decree of the President of the Russian Federation dated November 9, 2022 No. 809 "On the approval of the Foundations of State Policy for the preservation and strengthening of traditional Russian spiritual and moral values where paragraph 14 defines destructive ideology: "Ideological and psychological impact on citizens leads to the imposition of a system of ideas and values alien to the Russian people and destructive to Russian society.

The Presidential Decree develops and concretizes earlier documents

- ▶ individual provisions of the National Security Strategy of the Russian Federation
- ▶ of the Information Security Doctrine of the Russian Federation
- ▶ Strategies for countering extremism in the Russian Federation until 2025
- ▶ of the Strategy of the state national Policy of the Russian Federation for the period up to 2025.
- ▶ Fundamentals of State cultural policy
- ▶ Strategies for the development of the Information society in the Russian Federation for 2017-2030
- ▶ , etc.

It remains to guess which of the above is incriminated to the author? In its decision, Rospatent also points out a gap in the current legislation: the absence of a state register of scientific discoveries in the Russian Federation. Recognizing the unsatisfactory state of affairs regarding the state registration of scientific discoveries in the Russian Federation, the transfer of strategically important issues for ensuring the security and development of Russia to the international community and private structures, Rospatent simply states that these issues do not fall within its competence (case 300-ES22-11151C01-842/2022SIP-357/2022 of the Supreme Court of the Russian Federation). At the same time, the Chamber for Patent Disputes, which is part of the Rospatent structure, extends its competence to scientific disputes, contrary to art. 14 Federal Law "On Science and State Scientific and Technical Policy" dated 08/23/1996 N 127-Federal Law.

Instead of referring to the register of scientific discoveries, Rospatent for some reason refers to the portal of the TASS news agency, which is also unrelated to the state register of scientific discoveries, was not mentioned in Article 44 of the Constitution of the Russian Federation, as well as in the “Regulations on Discoveries and Inventions” in force at the time of the author’s appeal to Rospatent.

Before the escalation of the ideological and military confrontation between Russia and the United States, it was generally accepted that Russian science was organically integrated into the global one. Rospatent’s main objection is that the author’s proof contradicts **generally accepted proof** and the opinion of the international mathematical community (such an opinion is formed primarily in the United States, as a “generous grantee”). -

5 Generally accepted but false theories

Is “universal acceptance” a criterion of scientific truth? - The answer is no. The history of science is replete with examples of universally accepted false theories. In the Classical Middle Ages, at the level of religious beliefs and public consciousness, epidemics were perceived as divine punishment for various deviations from religious canons, in particular, departure from the dogmas of the church, attempts at rational knowledge of the world, apostasy [Izu18].

[Izu18]: Izutkin (2018), «Epidemics in the Classical Middle Ages in Europe»

Hands and surgical instruments were treated not before, but after operations. Another example of generally accepted evidence: the geocentric system of the world is the idea of the structure of the universe, according to which the central position in the Universe is occupied by the stationary Earth, around which the Sun, Moon, planets and stars rotate [Pto+98].

[Pto+98]: Ptolemy и др. (1998), *Almagest: or a mathematical essay in thirteen books*

This false theory existed for 1400 years, until it was refuted by the Polish astronomer Nikolai Copernicus, who developed the theory of planetary motion around the Sun based on the Pythagorean principle of uniform circular motions (treatise “On the Rotations of the celestial spheres published in 1543), and then Kepler’s Laws and Newton’s laws were discovered. A more recent example of the generally accepted [KZ22], but the false proof is the overestimation of the role of green

[KZ22]: Karavaeva и др. (2022), «GREEN FINANCE OF RUSSIA»

energy as an alternative to traditional energy. As a result of the voluntaristic decisions of the countries of the united West, gas prices have increased more than tenfold (!) . . . "without hydrocarbons, without reserves, the maximum level to which renewable energy can be brought is a maximum of 30 percent of the total energy balance," says Leonid Krutakov, associate professor at the Financial University under the Government of Russia [Interview in the feed <https://lenta.ru/news/2022/01/12/zelenerg/> on 09.02.23]. Among the generally recognized erroneous truths, I would especially like to highlight the dispute around the mouth of the Amur and about Sakhalin. Russians Russian navigator, who headed the first Russian circumnavigation of the world I. F. Kruzenshtern, Chairman of the Board of Directors of the Russian-American company Baron P. N. Wrangel, officer of the Russian Imperial Navy, researcher of the Sea of Okhotsk A.M. Gavrillov, until the middle of the XIX century, it was generally recognized that a number of scientists, navigators, statesmen about the unsuitability of the Amur River for navigation, among them: Russian navigator, who headed the first Russian circumnavigation of the world I. F. Kruzenshtern, Chairman of the Board of Directors of the Russian-American company Baron P. N. Wrangel, officer of the Russian Imperial Navy, researcher of the Sea of Okhotsk A.M. Gavrillov, Minister of Foreign Affairs K. V. Nesselrode. Following the listed authorities, Emperor Nicholas I of Russia believed that the Amur River was unsuitable for navigation, lost in the sands, and with the filing of Nesselrode, forbade Admiral of the Russian Fleet G.I. Nevelsky to explore the mouth of the Amur River under the pretext of saving treasury funds, preserving the Kyakhtin tea trade with China, maintaining a balance of relations with England and the United States in the Far East. And only in 1849-1851. Gennady Ivanovich Nevelskoy, disobeying the order, refuted this misconception by exploring the Amur estuary. The merit of the Russian admiral was the annexation of vast Far Eastern lands and Sakhalin Island to our country, and not the peninsula, as previously mistakenly considered by the mentioned authorities [Zad69].

[Zad69]: Zadornov (1969), The first discovery. To the ocean.

The history of science is replete with similar examples.

6 Protection of rights through the Constitutional and Supreme Courts

The author appealed to the Constitutional Court with a request to protect the principles of humanity and morality not of Western countries, but of Russia in the patented product. The fact is that on an ordinary wooden cube, a citizen burned out with a laser the proof of Fermat's Great Theorem. Rospatent refused the state registration of an industrial design, because the evidence found by the Russian contradicts the generally accepted document of a US citizen, on 140 pages. Rospatent demanded that the name of a citizen of the Russian Federation be deleted under a brief version of his proof, and also refused state registration of the advertisement under the pretext of violating public morality and morality. The question is, whose morality is implied?

The system of spiritual and moral values is becoming crucial in the context of the cognitive war unleashed by the West, the rapid development of information and communication technologies, visualization, three-dimensional modeling and printing, which easily overcomes state borders.

7 In the interest of humanity and morality of Russia

Acting in the interests of humanity and morality, not of Western countries, but of Russia, the author filed a complaint with the Constitutional Court. The reason for the appeal was the revealed uncertainty about whether paragraph 4 of Article corresponds to the Constitution of the Russian Federation. 1349 of the Civil Code of the Russian Federation (Civil Code of the Russian Federation) in the constitutional and legal sense in which the results of intellectual activity in the scientific and technical field that meet the requirements for industrial designs established by the Civil Code of the Russian Federation are evaluated by the Federal Executive Authority for Intellectual Property from the position of compliance with the public interests, principles of humanity and morality of Western countries, and not the Russian Federation Federation.

The dispute over the name of a Russian citizen and morality

On March 20, 2021, the author applied to the Federal Service for Intellectual Property (Rospatent) with application No. 2021501435/49 for state registration of an industrial design.

Product name "Device for learning "Hypercube wooden on a prefabricated stand with a proof of Fermat's great theorem"(hereinafter FLT).

In the positive formal examination of Rospatent for the Applicant's industrial design dated 07/16/2021, it was concluded: According to the results of the formal examination, the applicant is notified that the formal examination of the application for an industrial design conducted in accordance with paragraphs 1 and 3 of Article 1391 of the Civil Code of the Russian Federation has been completed with a positive result. I.e., the result of the Applicant's creative work is an original design solution. From the point of view of the state registration of a patent for an industrial design, this is enough, the truth / falsity of the Applicant's copyright proof could be left "to the judgment of posterity." Meanwhile, on April 14, 2022, Rospatent decided to refuse to grant a patent for an industrial design on the application on the grounds that the surname, first name of the Applicant in Latin letters, as well as the year 2020 of the mathematical proof of FLT found by him, engraved with a laser on the patented product, according to Rospatent, is misleading, as unreliable, and thus it is contrary to the public interest. Rospatent applied clause 4 of Article 1349 of the Civil Code of the Russian Federation in contradiction with the Constitution, considering the patented product to be the Applicant's full name, including the proof and the date of its location, contrary to public interests, principles of humanity and morality.

On May 29, 2023, by its decision in case No. SIP-947/2022, the Intellectual Property Rights Court (SIP) refused to satisfy the author's claims to Rospatent to declare illegal/invalid Rospatent's decision to refuse to grant a patent for an industrial design under application No. 2021501435/49 dated 03/20/2021. On August 21, 2023, the Presidium of the Intellectual Property Rights Court, by a decision in case C01-1179/2023, refused to satisfy the cassation complaints of both the Applicant of the registered industrial design of the author and the Union "Siberian Mediation Center"(SCM), which sold the product - the patented product through Internet Solutions LLC (Ozon trading platform). Disagreeing with the judicial acts adopted in the case, Avdyev M.A. and the Union appealed to the Supreme Court of the Russian Federation. On 10/23/2023, in case No. (SIP-947/2022), the Supreme Court of the Russian Federation rejected the

cassation appeals of the author and the Union "Siberian Mediation Center" against the decision of the Intellectual Property Rights Court of 05/29/2023 and the decision of the Presidium of the Intellectual Property Rights Court of 08/21/2023.

Along with judicial appeals, the Applicant appealed to the Government of the Russian Federation for the protection of intellectual rights in accordance with Article 44 of the Constitution of the Russian Federation with a proposal to register a scientific discovery in mathematics, the sovereignty of science and stimulate the interest of young people in science and technology, in other words, the implementation of Article 44 of the Constitution of the Russian Federation.

The applicant has exhausted all other domestic remedies, unsuccessfully resorted to extrajudicial protection through correspondence with the Government of the Russian Federation, publications in scientific publications, an open access educational video on the topic of FLT, and other measures. At the same time, the Applicant referred to the cancelled Resolution of the Council of Ministers of the USSR of August 21, 1973 No. 584 "On approval of the Regulations on Discoveries, Inventions and rationalization proposals"¹, the Applicant argued that to fit more than a hundred pages. The American version of the FLT proof on the six faces of the children's cube is impossible, unlike the Russian version of the FLT proof found by the Applicant, the main ideas of which are set out in two formulas and drawings and takes up half a page.

In the judicial acts listed above, the SIP and its Presidium went beyond the limits of a certain Federal Law 95-Federal Law [competence](#) and [authority](#), resolving a dispute in terms of morality, morality and science. Speaking of the scientific side, taking into account the accessibility of the presentation of the Applicant's FLT proof to schoolchildren, this kind of dispute must be resolved with the involvement of specialists in the fields of philosophy and logic, general methodology of science, geometry and physics, number theory, and school pedagogy. Considering the moral aspects (the right to the name of a Russian, not an American citizen, the possibility of presenting one's own version of the proof, even if this contradicts the dominant point of view of the international scientific community to the priority of science in the United States and the consolidated West, the prejudice about the

absence of a short version of the FLT proof), the dispute should be settled from the positions of epistemology, scientometry, morality and ethics, religion.

In fact, the above dispute is a manifestation of the contradictions inherent in clause 4 of Article 1349 of the Civil Code of the Russian Federation to the Constitution of the Russian Federation. The thesis that the name of a citizen and the date of his discovery are misleading, as unreliable, and thus contradicts the public interests expound the discursive position of apologists for pro-Western morality, alas, still prevailing in the domestic academic environment due to inertial thinking based on the long-term leadership of European and US countries in the fields of culture, education and sciences based on the system of Western values — the so-called societies of democracy and social welfare. It is important to remember that from the moral standpoint of Western countries, primarily the United States, Russia's scientific development is unacceptable.

In general, Western morality and ideology denies Russia as a sovereign state - this is the main public interest of the ruling classes of the countries of the united West.

Our spiritual and moral guidelines The constitutional reform carried out in 2020 introduced new spiritual and moral values into the text of the Russian Constitution. The Law of the Russian Federation on the Amendment to the Constitution of the Russian Federation dated March 14, 2020 No. 1-FKZ "On Improving the Regulation of Certain Issues of the Organization and Functioning of public Authority" introduced new norms, obviously indicating the setting of goals and objectives of a moral nature. We are talking about the wording of new articles (67.1, 75.1), as well as existing ones (paragraph "J. 1" of Part 1 of Article 72). For the first time, the current Russian Constitution enshrines provisions on "preserving the memory of ancestors who passed on ideals and faith in God," on children as the most important priority of Russian state policy, their "comprehensive spiritual, moral, intellectual and physical development," education in them "patriotism, citizenship and respect for elders."

Earlier, in its Decision No. 24-P dated September 23, 2014 "On the case of checking the constitutionality of Part 1 of Article 6.21 of the Code of Administrative Offences of

the Russian Federation in connection with the complaint of citizens N. A. Alekseev, Ya. N. Yevtushenko and D. A. Isakov the Constitutional Court of the Russian Federation noted that the family, motherhood and childhood in their traditional, ancestral understanding represents those values that ensure continuous generational change, are a condition for the preservation and development of the multinational people of the Russian Federation, and therefore need special protection from the state.

In the regulatory system of the Russian Federation, the Constitution of the Russian Federation and a number of normative acts protect morality, spiritual and moral values of Russian society, these are: Decree of the President of the Russian Federation dated November 9, 2022 No. 809 “On Approval of the Foundations of State Policy for the preservation and strengthening of traditional Russian spiritual and moral values”, where paragraph 14 defines destructive ideology:

The ideological and psychological impact on citizens leads to the imposition of a system of ideas and values alien to the Russian people and destructive to Russian society, including the cultivation of selfishness, permissiveness, immorality, denial of the ideals of patriotism, service to the Fatherland, natural continuation of life, the values of a strong family, marriage, large families, creative work, positive contribution of Russia to world history and culture the destruction of the traditional family through the propaganda of non-traditional sexual relations.

The Presidential Decree develops and concretizes earlier documents: certain provisions of the National Security Strategy of the Russian Federation, the Doctrine of Information Security of the Russian Federation, Strategies for countering extremism in the Russian Federation until 2025, Strategies of the State National Policy of the Russian Federation for the period up to 2025, Fundamentals of state cultural policy, Strategies for the development of information Society in the Russian Federation for 2017-2030, etc.

8 The morality of the countries of the United West

The morals of the countries of the United West and Russia are fundamentally different.

With the beginning of a special military operation, the West dropped diplomatic tricks. Western morality in some cases denies faith in God, adheres to the Cult of the Devil, promotes devil worship, homosexuality, denies marriage as a union of a man and a woman, promotes individualism, lies and hypocrisy are allowed as a means to achieve goals, etc. All this points to the decline of Western Civilization [[SHA91]]. To illustrate, when the sensational worldwide exhibition of the corpses of Professor Gunther von Hagens reached Russia, the ROC opposed such "shamelessness pointing out not the negative impact on morality, the lack of scientific and educational significance of dismembered human corpses in the form presented by Gunther von Hagens.

[SHA91]: Spengler и др. (1991),
The decline of the West



cal exhibits
n Hagens,
ath

Science, education and upbringing are based on spiritual and moral values. Thus, Federal Law No. 86 of July 5, 1996 "On State Regulation in the field of genetic engineering" defines mechanisms that ensure the safety of citizens and the environment in the process of carrying out genetic engineering activities and using its results. The Federal Law of May 20, 2002 was adopted. No. 54-Federal Law "On a temporary ban on human cloning based on the principles of respect for human beings, recognition of the value of personality, the need to protect human rights and freedoms and taking into account the insufficiently studied biological and social consequences of human cloning.

Another example: Decree of the President of the Russian Federation No. 490 dated October 10, 2019 "On the development of artificial intelligence in the Russian Federation"(with

[Avd24]: Avdyev (2024), «How can a student prove the ABC hypothesis using prime numbers, quantum mechanics and creative imagination?»

amendments and additions) defines the concepts of trusted artificial intelligence technologies that meet safety standards, developed taking into account the principles of objectivity, non-discrimination, ethics, excluding the possibility of harming a person and violating his fundamental rights when using them rights and freedoms, harming the interests of society and the state [Avd24].

These examples can be continued, taking into account the legislation regulating the handling of radioactive materials and nuclear weapons and peaceful atom in the energy sector, but the above is enough to conclude:

the results of intellectual activity in the scientific and technical field, including industrial designs, should be evaluated on the scale of spiritual and moral values of the Russian Federation, the morality of our country. The system of spiritual and moral values is becoming crucial in the context of the cognitive war unleashed by the West, the rapid development of information and communication technologies, visualization, three-dimensional modeling and printing, which easily overcomes state borders.

The current version of clause 4 of Article 1349 of the Civil Code of the Russian Federation does not contain an indication of public morality and morality from the standpoint of the values of the Russian Federation. As a result, in the case (SIP-947/2022) of the Supreme Court of the Russian Federation, the dispute was resolved based on the prejudices of the international mathematical community, postulating the secondary nature of Russian science and denying its scientific sovereignty.

How can the indication of the name of a Russian citizen (Article 21 of the Constitution of the Russian Federation) under the evidence of FLT found by him (Articles 44, 75.1 of the Constitution of the Russian Federation) contradict Russian public morality and morality? - the question is rhetorical. In all these cases, there is no scientific expertise in the procedural order, as provided for by the procedural code: the formulation of questions, the choice of an expert institution, the expert's warning about criminal liability, information about the expert's qualifications and specialization. The scientific organizations with whom the SIP conducted an "informal interview" did not even receive the controversial

patented product. Four out of ten scientific organizations surveyed in this way, for ethical reasons, refrained from answering the logically incorrectly formulated closed question: does Avdyev M.A.'s invited publication contain evidence of FLT? The answer to such a question may be: Yes or No.

But forgetting about scientific and elementary ethics, six scientific organizations vied with each other to denigrate the evidence of the Applicant's FLT, substituting the thesis under discussion, confusing scientific terminology. There were answers in an anonymous format.

9 Scientific objectivity

It turns out that without morality scientific objectivity, laid down in Article 14 of the Federal Law "On Science and State Scientific and Technical Policy" dated 08/23/1996 N 127-Federal Law, is impossible. In conclusion, based on the results of the examination on the merits of the Applicant's application to Rospatent - Adj. the decision to refuse to grant a patent 3 contains an unsubstantiated indication of possible plagiarism on the part of the Applicant from the evidence of Andrew Wiles, but without giving a specific context, presentation of ideas, formulations attributed to Andrew Wiles.

It seems impossible to arrange a text of more than one hundred pages so that it can be printed on six faces of a wooden cube for the creative development of a child.

Scientific discoveries have global and, in this case, cultural and historical significance from the point of view of pedagogy and education, since Fermat's Great Theorem, [insoluble](#) since 1637, in 2020, linking the times of Diophantus of Alexandria (III century NE, the Enlightenment (XVII century) and modernity (digitalization and 3D modeling of the XXI century), was first proved by means of the school curriculum in a short form. In the context of the heightened confrontation between the collective West and Russia, a brief proof of FLT, referred to as "mathematical pearls has important cultural and historical significance. The Applicant's evidence undermines the hegemony of the United States and the "beauty" found by the Ivy League professor, Prof. Princeton

University, Dean of Math. The Andrew Wiles Faculty of the hundred-plus-page proof, for which he was awarded the Abel Prize in 2016. But the search for Truth does not stop with the awarding of the most prestigious awards and prizes. And this principle is also a continuation of the spiritual and moral values shared by the Russian Federation: the constant development of personality and social institutions, a multipolar world, a barrier-free environment, a society of equal opportunities, etc.

Decree of the President of the Russian Federation dated 04/25/2022 No. 231 "On the announcement of the Decade of Science and Technology in the Russian Federation" emphasizes the importance of scientific and technological development of the country and, among other tasks, sets increasing the availability of information about the achievements and prospects of Russian science for citizens of the Russian Federation (letter in paragraph 2 of the Decree). From these positions, the Applicant's brief proof demonstrates to each student the priority and achievements of Russian science, and therefore has important public legal consequences for science, pedagogy, and strengthening the Russian morality of the leading state in the fields of education, science and technology. This Decree develops Article 34 of the Constitution of the Russian Federation: Everyone has the right to freely use their abilities and property for entrepreneurial and other economic activities not prohibited by law.

10 Scientific discoveries are of global importance

Speaking about the secondary nature of Russian science, the Applicant notes the ideological prerequisites that also arise from morality and a system of values. Back in 1991, the Presidium of the USSR Academy of Sciences recognized that it was "inappropriate" to maintain the state registration of scientific discoveries (decision No. 156 of May 14, 1991). The withdrawal of an intellectual result in the form of a scientific discovery under the pretext of "inexpediency" was undertaken by the Russian state at a time of great expectations from the integration of our country into the international scientific community and the division of labor. But as the special

military operation convincingly showed, such expectations turned out to be illusory.

In the Decade of Science and Technology, the issue of protecting intellectual potential requires special attention. It is enough to point out the vulnerability of clause 5 of Article 1259 of the Civil Code of the Russian Federation: . . . discoveries, to make sure that there is no Law on Discoveries, the successor of the State Committee for Inventions and Discoveries under the State Committee for Scientific Research of the USSR, the state service for registration of scientific discoveries.

Paragraph 1. of Article 44 of the Constitution of the Russian Federation states that everyone is guaranteed freedom of literary, artistic, scientific, technical and other types of creativity, teaching. Intellectual property is protected by law. From the available scientific publications and monographs from the peppery RSCI, the mathematical discovery was made by the Applicant in early 2020, and at that time was regulated by Resolution of the Council of Ministers of the USSR dated August 21, 1973 No. 584 "On approval of the Regulations on Discoveries, Inventions and innovation proposals".

In accordance with the above, guided by Part 1 of Articles 21, 75.1, Part 1 of Article 34, Part 1 of Article 44 of the Constitution of the Russian Federation, Part 3 of Article 3 of Articles 36, 96, 97 of the Federal Constitutional Law of 07/21/1994 N 1-FKZ "On the Constitutional Court of the Russian Federation

The wording of the petitioning part of the complaint

To recognize paragraph 4 of Article 1349 of the Civil Code of the Russian Federation as inconsistent with Part 1 of Articles 21, 75.1, Part 1 of Article 34, Part 1 of Article 44, Part 1 of Article 46 of the Constitution of the Russian Federation in the constitutional and legal sense in which the specified norm contradicts public morality and morality of the Russian Federation.

11 The response of the Constitutional Court

The decision of the Constitutional Court of the Russian Federation, dated 30/05/2024, N 1337-O, concerning the

rejection of the complaint filed by citizen Avdyev Marat Alexandrovich, alleging a violation of his constitutional rights by paragraph 4 of Article 1349 of the Civil Code of the Russian Federation. Constitutional Court of the Russian Federation

DEFINITION

dated May 30, 2024 N 1337-O

ON THE REFUSAL TO ACCEPT A CITIZEN'S COMPLAINT FOR CONSIDERATION

Avdyev MARAT ALEXANDROVICH FOR VIOLATING
IT

CONSTITUTIONAL RIGHTS BY PARAGRAPH 4 OF
ARTICLE 1349 OF THE CIVIL CODE

THE CODE OF THE RUSSIAN FEDERATION

The Constitutional Court of the Russian Federation, consisting of Chairman V.D. Zorkin, judges A.Y. Bushev, L.M. Zharkova, S.M. Kazantsev, S.D. Knyazev, A.N. Kokotov, L.O. Krasavchikova, M.B. Lobov, S.P. Mavrin, N.V. Melnikov, V.A. Sivitsky, having considered the possibility of adopting citizen M.A. Avdyev's complaints for consideration at the session of the Constitutional Court of the Russian Federation,

installed

:

1. The complaint of citizen Avdyev Marat Alexandrovich is rejected on the grounds that it fails to meet the criteria set forth in the Federal Constitutional Law "On the Constitutional Court of the Russian Federation." This law stipulates that a complaint to the Constitutional Court of the Russian Federation is deemed admissible if it meets the specified requirements.
2. The decision of the Constitutional Court of the Russian Federation on this complaint is definitive and cannot be appealed.

Chairman of the Constitutional Court of the Russian Federation
V.D. Zorkin.

.....

Nevertheless, even a negative answer allows the author to freely distribute and print the results of his intellectual activity in accordance with Articles 29 and 44 of the Constitution of the Russian Federation. It should be recalled that the sole grounds for refusal to register an industrial design patent by Rospatent were those of violations of public morals. The aforementioned elements have now been removed.

12 Don't invent entities beyond necessity

A simple proof has a higher scientific value: "do not invent entities beyond necessity" (William Occam). The inscriptions on the product according to the application for the patented industrial design of the author do not violate the rights of other persons and public interests, but on the contrary correspond to the public interests, principles of humanity and morality to the extent that education and enlightenment contribute to this. Since 2021. A 3D wooden hypercube on a prefabricated stand with a proof of Fermat's Great Theorem was placed by the author at the Siberian Mediation Center Union on Market Place as a developing souvenir for schoolchildren, students and curious youth. This souvenir was presented by the author to a number of libraries and universities in Russia.

13 The Metalanguage of the Universe

14 Conclusion. Prime numbers as metalanguage of universe

It is challenging to overstate the significance of prime numbers in the physical laws that govern the material world and, in a broad sense, the universe as a whole Tab. 14.1. There is a correlation between prime numbers and quantum mechanics, statistical physics, and the subsequent probability theory. The divisibility properties of prime numbers (only by one and themselves) follow from symmetry, independence, and the random nature of microstates in any thermodynamic system.

Таблица 14.1: Mathematics model. Algebra.

Difficulty of Understanding $\longrightarrow$			
Prime Numbers	Integer Polynomials	Matrices. SLDEs $\mathbf{y} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$.	Qua Me Ope
2, 3, 5, 7, 11 ... and even integers $2\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$	Irreducible Polynomials	Symmetry Group G . Completely reducible representations decomposed into irreducibles: $D = \sum_j^{\oplus} r_j D^{(j)}$	$\widehat{H}\psi$ entr $S =$
$g = \frac{1}{p}$ – probability density and $\underline{\tilde{Z}} = \langle g \rangle$ – group generating element	Characteristic polynomial $(\lambda - a_i)^k$ of a matrix	Statistical weight Γ and its differential $\Delta\Gamma$	Pro $ \Psi\rangle$ $c_n\psi$ mat
Fundamental Theorem of Arithmetic $a = \prod_p p^{\alpha(p)}$	$f = c \prod_p p^{\alpha(p)}$	$R = R_1 \oplus R_2 \cdots \oplus R_i$. Invariant subspaces. Characteristic polynomial.	Deg eige the (enc deg
The cognitive understanding of the universe	Polynomials and matrix functions	Description of dynamical processes	Mod mic
$\longleftarrow$ Foundations			

Prime numbers are a mathematical model of the possibility of isolating a subsystem with additive resource separation from a system Fig. 3.2. The utilisation of prime numbers facilitates the integration of a system, a suprasystem, and a subsystem. Prime numbers are metalanguage of universe.

The conclusion of the canonical Gibbs distribution was made on the basis of an equally probable distribution over all microchannel states of the system. This facilitates the use of logarithms and additive variables. Additive functions for homogeneous quantities form the basis for a series of natural numbers, for countable sets, and for the production of any measurement. The measurability of distances is introduced through the concepts of metrics and measures. It is evident that the properties of the microcosm are indicative of the properties of the macrocosm. The multiplication operation is considered to be of greater importance than the addition and subtraction operations. It is from these positions that the

axioms of arithmetic introduced by Giuseppe Peano can be elucidated, as well as the principle of mathematical induction, which is widely practised in mathematical proofs.

The conclusions derived can be extrapolated to a range of subsystems, finding equal application in mathematics (fundamentals of probability theory, logic) and physics. It is logical to determine the logarithm of the probability distribution and thereby ascertain an additive value, i.e. entropy. The capacity to differentiate a constituent element within a complex system, in conjunction with the capacity to establish a function, enabled the Architect of the Universe (if such a being exists, despite the scepticism of atheists) to render the world manageable and knowable, thereby reducing complex phenomena to simpler ones [Sel03].

[Sel03]: Selivanov (2003), The search for the wrong and the right

And the role of symmetry/asymmetry in our lives has not yet been properly realized, at least by Western science. The properties of polynomial rings and linear operators are derived from the properties of prime numbers. Due to the additive properties of entropy, it is possible to reduce the fluctuation of easily measurable quantities: the number of particles, energy, temperature, pressure, as the sample increases and describe it in simple linear relations. This is how the connection of the microcosm with the macrocosm is realized. This relationship obeys the laws of mathematical statistics (statistical physics). see also the interesting popular book [Pon86].

[Pon86]: Pontryagin (1986), Generalizations of numbers

Prime numbers are the metalanguage of the universe.

It is striking that, literally from the first grades, schoolchildren study phenomena that are based on quantum nature, the fundamental laws of our universe: symmetry, uniformity of space, isotropy, etc. If mathematics is called the language of the universe, then prime numbers are **metalanguage of the Universe**.

In this sense, prime numbers came to us from the beginning of the universe, they are relics from the Big Bang! Is it a metalanguage or according to Stanislav Lemm **His Master's Voice** - perhaps there is no adult on Earth who does not know how to count and pray, but not everyone is able to hear...

To better feel the surprise that the author feels, imagine

[PH95]: Penrose и др. (1995),
«Shadows of the mind: a search
for the missing science of
consciousness»

a world without prime numbers, where any number has as many divisors as you want, where it is impossible to separate a part from the whole, where every phenomenon is irreducible to simpler ones. It is about such phenomena that Roger Penrose mentions in his book [PH95]. The discreteness of the genetic code, which consists in the fact that a given nucleotide can be part of only one codon, is another example of the importance of separating a part from the whole.

Summarizing the above, it can be argued that if there were no prime numbers, it would change our universe beyond recognition. Would it be possible for a reasonable person to originate in a world without prime numbers?

It is important to note that the system may have the properties of emergence (English from "arising, unexpectedly appearing") qualitatively new, not inherent in its components individually.

In the social sphere, of great interest is the [superadditive effect](#) (i.e., "exceeding the amount"), meaning an additional increase in the productivity of group work, exceeding the amount of contributions separately from each other. For such cases, the above approach should be supplemented with qualitatively new methods. But such complex phenomena are not included in the subject of the study. For more information about the synergy problem, see, for example, [Kre].

[Kre]: Kreik (),

Since any daring attempts to continue the scientific search for brief evidence of FLT were met with resistance, the author was forced to continue scientific work on the ABC hypothesis, from which a number of interesting consequences follow, including FLT itself. Both theorems turned out to be connected due to the common principles laid down during the formation of our universe.

And I would like to end this chapter with a quote:

"Two things fill the soul with constantly new, increasing wonder and awe: the starry sky above me and the moral law in me. Both, as if covered with darkness or abyss, are beyond my horizon, I should not explore, but only assume. I see them in front of me and connect them directly with the consciousness of my existence..."

Immanuel Kant.

Приложения

1 Пространство Лебега, Гильберта. Операторы

В этой секции и следующей используются обозначения: ψ, ϕ - волновая функция, G - ограниченная область в R^n .

Всё сказанное в этом разделе о пространстве Лебега $\mathcal{L}_2(G)$ переносится на пространство Лебега **с весом** $\mathcal{L}_2(G; \rho)$.
Определение $\langle f, g \rangle_\rho$:

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_G \rho(x) f(x) g(x)^* dx \quad (1.1)$$

где $\rho \in C(\bar{G})$ и $\rho(x) > 0$, $x \in G$, $f, g \in \mathcal{L}_2(G; \rho)$

(Далее для простоты ниже $\rho = 1$ и в формулах опускается, но выводы касающиеся ортонормированных функций, можно распространить на $\forall \rho(x) > 0$, $x \in G$, в чём легко убедиться путем замены переменных [ЖВ22]). В пространстве измеримых функций, для которых интеграл от квадрата модуля конечен $\int \|f(x)\|^2 dx < \infty$ - в пространстве Лебега $\mathcal{L}_2$ рассмотрим систему уравнения линейного оператора $A\psi_a = a\psi_a$, где собственные функции ψ_a , являются **линейно независимыми**, а собственные значения линейного оператора A заданы над полем $\mathbb{C}$.

1.1 Базис из линейно независимых функций

Всякая **ортонормальная система** $\{\psi_k\}$ состоит из линейно независимых функций, т.е. $\forall c_k$ и $\sum_k |c_k| \neq 0$ невозможно $\sum_k c_k \psi_k \equiv 0$. Собственные функции $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$ с помощью процесса **ортгонализации Грама-Шмидта** можно привести к совокупности ортонормированных функций, например в $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$: является тригонометрическая система:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1.2)$$

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{i,j}$$

1	Пространство Лебега, Гильберта.	
	Операторы	331
1.1	Базис из линейно независимых функций	331
1.2	Функция Грина. Пропагатор	337
1.3	Интегральное уравнение Фредгольма	342
2	Статистическая матрица.	344
3	Каноническое распределение Гиббса	347
4	Вырождение энергетических уровней .	350

[ЖВ22]: Жаринов и др. (2022), Уравнения математической физики

(Нижнее формула - соотношение ортогональности может быть записана также в в виде: $\langle f, g \rangle = 0$, она играет важную роль при работе в пространстве Лебега $\mathcal{L}_2$).

Для указанных функций $\forall f(x)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$c_k = (f, \psi_k) \\ f = \sum_k c_k \psi_k = \sum_k (f, \psi_k) \psi_k \quad (1.3)$$

Верно равенство [Парсеваля-Стеклова](#) для ортонормальной системы $\{\psi_k\}$, полной в $\mathcal{L}_2$:

$$\sum_k |(f, \psi_k)|^2 = |f|^2 \quad (1.4)$$

Из [теоремы Рисса-Фишера](#) следует:

Уравнение замкнутости

Для того чтобы ортонормальная система $\{\psi_k\}$ была полной в $\mathcal{L}_2$ необходимо и достаточно чтобы

- для $\forall f$ выполнялось равенство Парсеваля-Стеклова;
- $\forall f$ из множества $\mathcal{M}$ [плотного](#) в $\mathcal{L}_2(G)$ можно было сколь угодно точно приблизить в $\mathcal{L}_2(G)$ линейной комбинацией функций этой системы.

См. §1[ЖВ22].

[ЖВ22]: Жаринов и др. (2022), Уравнения математической физики

Изложенные выше свойства для пространство Лебега $\mathcal{L}_2(G)$ справедливы и для его дискретного аналога l_2 и тем более для его конечномерных подпространств пространства l_2 . Согласно теореме [Рисса-Фишера](#) пространство Лебега $\mathcal{L}_2(G)$ изоморфно пространству Гильберта H .

В квантовой физике - волновая функция, являющаяся решением линейного уравнения Шрёдингера, определяется в [координатном](#) $\phi(q, t)$ либо [импульсном](#) представлении $\psi(p, t)$.

Уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H}(p, q) \Psi \quad (1.5)$$

Симметрия квантовомеханической некоторой группы проявляется как **инвариантность** уравнения Шрёдингера относительно преобразований над переменными координат и импульса (q, p) из этой группы (напомним, что в классической механике преобразования, сохраняющие вид гамильтониана называют каноническими). Если уравнение Шрёдингера инвариантно относительно преобразования, то после преобразования оно должно сохранить прежний вид [Пет99]. Очевидно, что это будет выполнено, если эта подстановка не изменит вид гамильтониана $H(x)$ 1.5.

[Пет99]: Петрашень Мария Ивановна (1999), Применение теории групп в квантовой механике

Следствием инвариантности гамильтониана при канонических преобразованиях является его **эрмитовость**. Для эрмитова оператора собственные значения являются действительными числами и соответствуют энергии системы. В ортонормированной системе функций можно подобрать базис из собственных векторов, отвечающих своим собственным значениям (энергии), где гамильтониан системы приобретает простой вид

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (1.6)$$

где E - энергия исследуемой системы (сумма энергий подсистем). Это соответствует **теореме о кинетической энергии**, изучаемой в на уроках механики в школе.

Собственные значения образуют дискретную последовательность (конечную или бесконечную счетную), что является характерным для собственных значений, собственные функции принадлежащих пространству Гильберта.

Скалярное произведение Ψ_1, Ψ_2 являющихся решением 1.5 определяется по формуле:

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \sum_p \langle \Psi_1, \psi_p \rangle \langle \psi_p, \Psi_2 \rangle. \quad (1.7)$$

Налицо аналогия с обычным комплексным векторным пространством. Полная ортонормированная система функций играет роль базисной системы ортогональных друг

другу векторов единичной длины. Функция Ψ есть вектор в этом пространстве (с бесконечным числом измерений), коэффициенты Фурье 1.3 - это компоненты по направлениям базисных векторов, а норма этого вектора равна сумме квадратов модулей составляющих. Скалярное произведение 1.7 равно сумме произведений c_p - каждой компоненты 1.3 на величину, комплексно сопряженную соответствующей компоненте $c_p^* \Rightarrow$ определить среднее значение оператора A по формуле:

$$\langle A \rangle = \frac{\langle \Psi, A\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle}. \quad (1.8)$$

Интегрируемость оператора, действующего на произвольное решение уравнение Шрёдингера $A\Psi$:

$$A\Psi = \sum_{p,r} c_p^r A\psi_p = \sum_{p,r} a_p c_p^r \psi_p. \quad (1.9)$$

определена в силу сходимости ряда $\sum_{p,r} a_p^2 |c_p^r|^2$ для финитной волновой функции Ψ и оператора A с ограниченной нормой (которая инвариантна относительно выбранного базиса) [Сад04].

[Сад04]: Садовничий (2004),
Теория операторов

В случае ограниченной нормы оператора и сходимости ряда можно определить оператор $F(A)$ через разложение в степенной ряд по квадратной матрице $a_p c_p^r$ вида: $F(A)\Psi = \sum_{p,r} F(a_p) c_p^r \psi_p$. Такое определение функции $F(A)\Psi$ также не зависит от базиса, в частности для функции экспоненты $e^{i\xi A}$:

$$e^{i\xi A} \Psi = \sum_p e^{i\xi a_p} c_p \psi_p. \quad (1.10)$$

Можно определить статистическое распределение $f(\xi)$ случайной величины для любого динамического состояния физической системы. Действительно, введённая русским математиком и механиком А.М. Ляпуновым характеристическая функция $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} P(x) dx$ распределения случайной величины $P(x)$ (для дискретного случая определяется по формуле: $f(\xi) = \sum_n e^{i\xi X_n}$, знание которой позволяет полностью описать распределение - это по определению, среднее значение величины e^A в этом

состоянии. Воспользовавшись определением среднего 1.8, вычислим непосредственно это среднее значение с помощью выражения:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{\langle \Psi, e^{i\xi A} \Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} \\ f(\xi) &= \sum_p w_p e^{i\xi a_p} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Где определение весовых коэффициентов задаётся формулами:

$$w_p = \frac{\sum_r |c_p|^2}{\langle \Psi, \Psi \rangle} = \frac{\sum_r |\langle \psi_p, \Psi \rangle|^2}{\langle \Psi, \Psi \rangle}. \quad (1.12)$$

Из выражения для характеристической функции распределения следует что:

- Величина $f(\xi)$ может принимать только значения $1, 2, \dots, a_p$ т. е. собственные значения сопоставленного ей оператора. a_p
- Вероятность того, что Ψ примет значение a_p , есть w_p .
- Среднее значение $\langle f(\xi) \rangle$ дается выражением при условии сходимости этого ряда что обеспечивается в силу полноты ортонормальной системы и равенства Парсеваля-Стеклова 1.4.

.

Кубо, анализируя матрицу плотности свободной частицы в координатном представлении, приводит формулу для элемента статистической матрицы в координатном q -представлении §2.32 [Ky607]:

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{-\beta \hat{H}} | q'' \rangle &= \exp \left\{ -\beta \hat{H}(q') \sum_i \varphi_i(q') \varphi_i^*(q'') \right\} \\ &= \exp \{ -\beta \hat{H}(q') \} \delta(q' - q'') \end{aligned} \quad (1.13)$$

Важно отметить, что хотя ряд $\sum_l \psi_l(q') \psi_l(q'')^*$ не сходится в обычном смысле, его можно рассматривать как δ -функцию Дирака. Это следует из того, что если функции ψ_k ($k = 1, 2, \dots$) образуют полную систему $\{\psi_k\}$ в

[Ky607]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

функциональном пространстве, удовлетворяющем заданным граничным условиям, то для любой функции 1.3 выполняется соотношение:

$$\int \sum_l \psi_l(q') \psi_l^*(q'') f(q'') dq'' = f(q') \quad (1.14)$$

и эта формула является одним из способов определения δ -функции.

В выражении 1.13 при разложении может быть использована произвольная система функций при условии, что она является полной. При этом не требуется, чтобы функции были собственными значениями уравнения 1.5. Это, очевидно, следует из того, что соотношение 1.14 является совершенно общим. Следовательно, в качестве базиса для представления матрицы плотности 1.13 может быть использована любая полная система функций, например, плоские волны 1.2, 1.3.

Уравнение Шрёдингера 1.5 эквивалентно некоторому эволюционному принципу. Рассматривая среднее значение энергии в состоянии ψ как функционал, определенный на классе квадратично интегрируемых функций L_2 , можно отыскать функцию ψ , как соответствующую экстремуму этого функционала, путём обращаяющую в ноль вариации. Вычислив вариацию, легко убедиться, что условия экстремума удовлетворяются для функции ψ , если она подчиняется уравнению Шрёдингера:

$$\hat{H}\psi = \langle E \rangle \psi \quad (1.15)$$

а среднее значение энергии есть собственное значение в этом состоянии. Верно и обратное, если какая-то функция ψ , имеет экстремум $\langle E \rangle$, то она удовлетворяет уравнению Шрёдингера.

Поэтому наименьшее значение $\langle E_{min} \rangle$ оператора $\hat{H}$ даёт абсолютный минимум функционала $\langle E \rangle$, который реализуется на волновой функции основного состояния системы ψ_0 . Следующее по величине после $\langle E_{min} \rangle$ собственное значение $\hat{H}$ даёт, минимум $\langle E \rangle$ на классе функции ортогональных к ψ_0 и так далее.

Осцилляционная теорема

В квантовой теории осцилляционные теоремы связывают число узлов (нулей) волновой функции - решения уравнения Шрёдингера с номером энергетического уровня E_n осцилляционная теорема гласит: волновая функция $\psi(x)$ соответствующая n -му энергетическому уровню, имеет ровно n узлов (точек, где $\psi(x)$ обращается в нуль (не считая граничных точек). Это позволяет визуализировать энергетические состояния: основное состояние $n = 0$ не имеет узлов, первое возбуждённое $n = 1$ имеет — один узел и т.д. Например для квантового гармонического осциллятора решения (эрмитовы полиномы) имеют ровно n узлов для $E_n = 2n + 1$.

Здесь уместна аналогия [осцилляционной теоремы](#) и выражения для нетривиальных нулей функция $\Xi(t)$ 1.19.

В той или иной степени осцилляционная теорема изучается на уроках школьной химии изучается строение электронных оболочек атома $s, p, d, f \forall$, где литера обозначает соответствующую форму орбитали, вытекающую из решения уравнения Шрёдингера.

1.2 Функция Грина. Пропагатор

В этой подсекции H - гамильтониан ψ и Ψ - волновые функции, ρ - плотность вероятности, G - функция Грина K - её разновидность [пропагатор](#) S - действие.

Перейдём теперь к полному уравнению Шрёдингера, описывающему эволюцию во времени. Для стационарных состояний зависимость от времени является чисто гармонической в силу вещественности энергии. Среднее значение любой физической величины, не зависящей явно от времени в стационарном состоянии, оказывается постоянным.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве произвольное, в общем случае, нестационарное решение уравнения Шрёдингера $\Psi(q, t)$, где q обозначает не одну, а совокупность переменных данного представления, запишем его в виде разложение по времени [\[Зел02\]](#):

[\[Зел02\]](#): Зелевинский (2002),
Лекции по квантовой физике

$$\Psi(q, t) = \sum_n \bar{\psi}_n(q) e^{-i\omega_n t} \quad (1.16)$$

где $\bar{\psi}_n(q)$ - коэффициент разложения, а знак суммы означает сумму по Фурье-гармоникам. Подставляя разложение в уравнение Шрёдингера, считая, что гамильтониан $\hat{H}$ не зависит явно от времени, принимая во внимание условие ортонормированности, приравнивая коэффициенты по каждой гармонике отдельно, получим:

$$\hat{H}\bar{\psi}_n(q) = \hbar\omega_n\bar{\psi}_n(q) \quad (1.17)$$

Коэффициенты $\bar{\psi}_n(q)$ разложения являются решениями стационарного уравнения Шрёдингера, отвечающим энергии $E_n = \hbar\omega_n$

Из условия нормировки 1.2 и ортогональности волновых функций ψ_n следует вывод, что коэффициент разложения $\bar{\psi}_n(q)$ в формуле 1.16 отличается от нормированных волновой функции лишь постоянными множителями, в общем случае комплексными $\bar{\psi}_n(q) = c_n\psi_n$, следовательно:

$$\Psi(q, t) = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \psi_n(q) \quad (1.18)$$

Эта формула даёт общее решение для нестационарного уравнения Шрёдингера. Заметим, что для квазиклассического приближения волновую функцию часто выражают через две вещественные модуль - корень из плотности вероятности 2.9 и фазу, как интеграл от аналога достаточно плавно изменяющегося классического импульса частицы по пути движения, что позволяет выразить волновую функцию Ψ как функцию от плотности вероятности ρ и фазы S :

$$\Psi = \sqrt{\rho} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) \quad (1.19)$$

Выбор решения уравнения Шрёдингера для конкретной физической ситуации зависит от начальных условий. Согласно квантовомеханическому [принципу причинности](#) задание волновой функции в начальный момент времени полностью определяет дальнейшую эволюцию системы.

Поскольку начальная волновая функция может быть произвольно задана, это означает, что любая $\Psi(q, t)$ может быть разложено представлена как суперпозиция по стационарным решением уравнения Шрёдингера. Стационарные волновые функции $\psi_n(q)$ образуют полную ортонормированную систему функций, при этом коэффициенты c_n в 1.18 легко находятся по формуле:

$$c_n = \int \psi_n^* \Psi(q, 0) d\tau \quad (1.20)$$

Из чего следует вывод, что величина $[\psi_n]^2$ даёт вероятности обнаружения у системы энергии E_n , при этом среднее значение энергии системы не зависит от времени:

$$\langle \hat{H} \rangle = \sum_m E_m |c_m|^2 \quad (1.21)$$

Поскольку исходное состояние системы нестационарно и не имеет определённой энергии, можно говорить лишь о среднем значении энергии. Из сказанного вытекает важное следствие: задание амплитуд c_n полностью определяет состояние системы.

Выразим решение Ψ_n для произвольного момента времени через начальные условия.

Подставляя 1.20 в 1.18 получаем:

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) &= \sum_n \int \psi_n^*(q') \Psi(q', 0) \psi_n(q) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} d\tau \\ &= \int G(q, q', t) \Psi_n(q', 0) d\tau \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь введена [функция Грина](#) описывающая распространение любого исходного пакета:

$$G(q, q', t) = \sum_n \psi_n(q) \psi_n^*(q') e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \quad (1.23)$$

Функция Грина также подчиняется уравнению Шрёдингера и представляет собой его [частное решение](#), удовлетворяющее начальным условиям, которые легко найти

положив в 1.22 время $t = 0$. $\implies$ вывод, граничное условие - правая часть дифференциального уравнения Шрёдингера:

$$G(q, q', 0) = \delta(q - q') \quad (1.24)$$

Из двух последних формул следует, что для того, чтобы произвольное решение уравнение Шрёдингера можно было представить в виде 1.18 необходимо соблюдение условия:

$$\sum_n \psi_n(q) \psi_n^*(q') = \delta(q - q') \quad (1.25)$$

Заметим, что $G(q, q', t, t')$ – определяется как **пропагатор** в квантовой механике, он соответствует амплитуде вероятности перемещения частицы из одного места пространства в другое за заданный промежуток времени или вероятности перемещения частицы с определённой энергией и импульсом.

[Зел02]: Зелевинский (2002),
Лекции по квантовой физике

Несложно вывести [Зел02] формулу пропагатора для свободного движения частицы:

$$K(r, r', t) = \frac{m}{2\pi i \hbar t} \exp \left\{ -\frac{m}{2i \hbar t} (r - r')^2 \right\} \quad (1.26)$$

Легко проследить аналогию пропагатора с формулой для определения так называемой $\psi(\frac{1}{x})$ - функции, введенной Риманом 1.8 и 1.11, где можно задать $r' = 0$, $r = n$, $t = x$. Такая аналогия может на первый взгляд оказаться искусственной, но в следующем разделе она будет раскрыта более полно.

Функция Грина, пропагатор основаны на принципе линейности воздействия независимых факторов, суперпозиции сил, полей. Для случая квазиклассического приближения в уравнения Шрёдингера подставляется функция в виде, аналогичном 1.19, но с добавлением комплексного слагаемого в виде корня из плотности вероятности в фазу $\frac{\hbar}{i} \ln(\sqrt{\rho})$ и дальнейшим разложением фазы в ряд по степени постоянной Планка:

$$\psi(r) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(r)\right) \quad (1.27)$$

$$S = S_0 + \hbar S_1 + \frac{\hbar^2}{2}S_2 + \dots$$

Подставляя 1.27 в уравнение Шредингера и приравнявая члены с одинаковыми степенями $\hbar$, несложно вывести уравнение для волнового пакета с заданным направлением распространения, вычислить как для классического случая его амплитуду через импульс $p(x)$ по формуле: $A(x, t) = \frac{\text{const}}{\sqrt{p(x)}}$ и фазу в точности до множителя $\frac{i}{\hbar}$ равную классическому действию 2.2.

Интересно отметить, что с математической точки зрения описанное **квазиклассическое приближение** при решении задач квантовой механики (1926) **WKB Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна** является разновидностью метода **стационарной фазы**. На основании WKB разработана альтернативная формулировка квантовой теории **метод интегралов по путям Фейнмана** [Tax11], заключающаяся в суммировании вкладов от всех траекторий с весом экспоненты $\exp\left\{i\frac{S}{\hbar}\right\}$, где S - **классическое действие** 2.2 вдоль данной траектории. Классический **принцип наименьшего действия** отбирает из семейства **виртуальных траекторий** одну, удовлетворяющую классическим уравнениям движения.

[Tax11]: Тахтаджян (2011), Квантовая механика для математиков, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск 2011, 496 с.; English transl., LA Takhtajan, Quantum mechanics for mathematicians

Метод интегралов по путям Фейнмана

Квантовая механика основана на принципе **суперпозиции траекторий**, где результирующая волновая функция (амплитуда вероятности) определяется интерференцией их вкладов, имеющих разные фазы [Зел02]. Это напоминает явление интерференции волн в оптике.

[Зел02]: Зелевинский (2002), Лекции по квантовой физике

Аналогию пропагатора с формулой функции $\psi(x)$, введенной Риманом, следует рассмотреть детальнее.

Свойство аддитивности энергии, энтропии, числа частиц подсистем, образующих исследуемую систему, в действительности является проявлением явления симметрии.

1.3 Интегральное уравнение Фредгольма

В этой секции ϕ, ψ - искомые функции для решения интегрального уравнения, $\mathbb{K}$ - непрерывное ядро интегрального уравнения K - оператор ядра E - единичная матрица.

Рассмотренная выше функция Грина 1.23 - это пример интегрального уравнения - уравнения, содержащего искомую функцию под знаком интеграла на некоторой области Ω из n -мерного евклидова пространства R^n (для простоты изложения можно считать эту область одномерным открытым интервалом $(0, a)$ - на вывод формул такое упрощение не влияет).

$$\phi(x) = \mu \int_{\Omega} \mathbb{K}(x, y) \phi(y) dy + f(x) \quad (1.28)$$

и союзное к нему интегральное уравнение

$$\psi(x) = \mu \int_{\Omega} \mathbb{K}^*(x, y) \psi(y) dy + g(x) \quad (1.29)$$

(Здесь подразумевается непрерывное ядро $\mathbb{K}$, заданное на замкнутой области $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.) Подразумевается, что функция f и ядро $K(x, y)$ непрерывны на соответствующих областях определения.

Из теории интегральных уравнений известно, что комплексное значение μ , при котором однородное интегральное уравнение имеет нетривиальные решения из $L_2(G)$, называется **характеристическим числом** ядра $\mathbb{K}$, а соответствующие решения — собственными функциями этого ядра, отвечающими этому характеристическому числу.

Definition 1.1 Характеристические числа μ ядра $\mathbb{K}$ и собственные значения λ оператора взаимнообратны, а их собственные функции совпадают.

В операторной форме уравнения 1.28, 1.29 быть выражены как:

$$\begin{aligned} \phi &= \lambda K \phi + f \\ \psi &= \bar{\lambda} K^* \psi + g \end{aligned} \quad (1.30)$$

где интегральные уравнения определяются ядрами

$$(Kf)(x) = \int_G \mathbb{K}(x, y)f(y)dy$$

$$(K^*f)(x) = \int_G \mathbb{K}(x, y)f(y)dy \quad (1.31)$$

соответственно. Возможно последовательное применение операторов $K_3 = K_2K_1$ по правилу $(K_2K_1)^* = K_1^*K_2^*$, а также возможны **повторные ядра** $K^{p+1} = K(K^p) = (K^p)K$.

Упрощение до системы алгебраических уравнений

Каждое интегральное уравнение с вырожденным ядром, т.е. с разделяемыми $\mathbb{K}(x, y) = \Phi(x)\Psi(y)$ переменными, эквивалентно системе алгебраических уравнений $s = \mu As + a$, и этот результат обобщается на $\forall$ непрерывные ядра. [ЖВ22].

Операторная форма позволяет лаконично выразить решение интегрального уравнения вида 1.28 через **резольвенту** по формуле:

$$(I - \mu K)^{-1} = 1 + \mu R, |\mu| < \frac{1}{MV} \quad (1.32)$$

Здесь $M = \max(|\mathbb{K}(x, y)|)$ - это максимальное по абсолютному значению ядра при этом $x, y \in$ исследуемой области, а переменная $V = \int_{\Omega} dy$ обозначает **меру** исследуемой области.

Решение 1.29 находится с помощью **резольвенты**:

$$\phi(x) = f(x) + \mu \int_{\Omega} \mathbb{R}(x, y)f(y)dy \quad (1.33)$$

В свою очередь резольвента определяется по формуле:

$$\mathbb{R}(x, y, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \mathbb{K}_{i+1}(x, y) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^N M_{i,k} f_i(x) g_k(y) \quad (1.34)$$

Этот ряд аналитичен по μ и сходится в круге $|\mu| < \frac{1}{MV}$. Под $D(\mu)$ подразумевается определитель соответствующего алгебраического уравнения $D(\lambda) = \det(E - \lambda A)$, $M_{i,k}$ обозначает алгебраическое дополнение матрицы $(E - \lambda A)$, для которого степень многочлена по λ на единицу меньше $D(\lambda)$. Повторное ядро и повторная резольвента эрмитово сопряженного ядра выражаются через повторные ядра и соответственно резольвенту исходного ядра аналогично, по общим правилам работы над линейными операторами. В круге $|\mu| < \frac{1}{MV}$ существует и ограничен обратный оператор:

$$(I - \bar{\mu}K^*)^{-1} = 1 + \bar{\mu}R^*, |\mu| < \frac{1}{MV} \quad (1.35)$$

Для союзного интегрального уравнения определитель и ранг матрицы $\bar{A}^*$ совпадают с ранее полученными значениями. Согласно I теореме Фредгольма при $D(\lambda) \neq 0$, то интегральное уравнение 1.28 и союзное к нему 1.29 уравнение разрешимы при любых свободных членах f и соответственно g . Оба упомянутых уравнения имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений равное $n - \text{rank}(E - \lambda A)$ (II теорема Фредгольма).

Уравнения 1.32 и 1.34 имеют вид, аналогичный 1.2. Эта аналогия объясняется с позиции квантовой физики.

2 Статистическая матрица.

В этой секции все операторы и матрицы рассматриваются в гильбертовом пространстве.

Уравнение Лиувилля описывает эволюцию плотности вероятности $\rho(p_i, q_i; t)$ во времени. Согласно правилу нахождения полной производной функции с учётом несжимаемости потока плотности вероятности по аналогии с жидкостью в фазовом пространстве:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, \hat{H}\} \quad (2.1)$$

Это [теорема Лиувилля](#), она непосредственно следует из инвариантности фазового объема при [канонических преобразованиях](#). Эти же преобразования объясняют лаконичную запись скобок Пуассона $\{\rho, \hat{H}\}$. [[Лан04](#)].

[[Лан04](#)]: Ландау (2004), Теоретическая физика. Том 1. Механика

Для квантово-механического случая можно сопоставить любой исследуемой системе [статическую матрицу](#) в жордановой форме или блочно-диагональном виде в гильбертовом пространстве, на диагоналях которой будут записаны вероятности обнаружения микрообъекта в заданном квантовом состоянии. Вместе такие вероятности образуют [полную группу событий](#), а их сумма равна единице, как предусматривают 2.10, 2.16 и условие нормировки.

Для нахождения статистической матрицы исследуемой системы предположим сначала, что она находится в чисто квантовом состоянии с волновой функцией $\langle n | \hat{\psi} | m \rangle$.

Среднее значение наблюдаемой f выражается формулой вида:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \sum_{nm} c^* c f_{nm} = \sum_{nm} w_{nm} f_{nm} \\ f_{nm} &= \int \psi_n^* \hat{f} \psi_m dq \end{aligned} \quad (2.2)$$

Множество величин w_{nm} это элементы матрицы плотности (или статистического оператора) в энергетическом представлении. - они образуют [статистическую матрицу](#). Задача нахождения такой матрицы сводится к вычислению вероятностей $w_n = w_{nn}$ - это вероятности нахождения системы в состояниях с энергией E_n , и они образуют диагональные элементы матрицы плотности.

Формула для среднего значения произвольной величины f упрощается. В работе [[Лан02](#)] w_{mn} рассматриваются как матричные элементы статистического оператора $\hat{w}$. Статистический оператор (или матрица плотности) описывает смешанное состояние системы.

[[Лан02](#)]: Ландау (2002), Теоретическая Физика В 10т. Том 5. Статистическая Физика.

В этом случае сумма $\sum_n w_{nn} f_{nn}$ будет диагональным матричным элементом $\hat{w} \hat{f}$, а среднее значение наблюдаемой $\hat{f}$ будет вычисляться по формуле для нахождения [следа](#) от суперпозиции операторов - соответствующие матрицы просто перемножаются:

$$\bar{f} = \sum_n (\hat{w} \hat{f})_{nn} = tr(\hat{w} \hat{f}) \quad (2.3)$$

Эта формула позволяет производить вычисление среднего $\bar{f}$ с помощью полного набора взаимно ортогональных нормированных функций. Заметим, что **смешанное состояние** представляет собой статистический ансамбль различных **чистых состояний**, каждое из которых возникает с определённой вероятностью. Такое состояние не может быть описано одним вектором состояния. Вместо этого оно описывается **матрицей плотности**, которая представляет собой взвешенную сумму матриц плотности чистых состояний ансамбля.

Представление Шрёдингера, как способа описания квантовомеханических явлений, эволюция системы во времени описывается изменением вектора состояния, а операторы физических величин постоянны. Для матрицы плотности производная по времени от оператора $\hat{w}$ вычисляется с помощью коммутатора аналогично 3.2:

$$\dot{\hat{w}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{w}, \hat{H}] = \frac{i}{\hbar} (\hat{w}\hat{H} - \hat{H}\hat{w}) \quad (2.4)$$

Это условие выполняется, если матрица плотности коммутирует с гамильтонианом.

Таким образом получено выражение - квантово-механический аналог **теоремы Лиувилля**. Для стационарности статистической матрицы необходимо обращение в нуль производной $\dot{\hat{w}}$, другими словами, чтобы оператор $\hat{w}$ коммутировал с гамильтонианом $\hat{H} \implies$ статистическая матрица является диагональной, эрмитовой, при этом значения плотности вероятностей $\hat{w}$ на главной диагонали являются вещественными и положительными значениями. Знание спектра волновой функции в энергетическом представлении позволяет определить саму волновую функцию в точности до фазы. Фаза волновой функции не влияет на наблюдаемые величины, такие как плотность вероятности или средние значения.

След оператора инвариантен относительно выбора базиса.

Произвольное состояние, в общем случае, нестационарное решение уравнения Шрёдингера, можно выразить $\Psi(q, t)$ как через интеграл Лебега - функцию Грина 1.23 в L_2 , так

и в гильбертовом пространстве. (Оба представления эквивалентны благодаря изоморфизму между пространством L_2 и гильбертовым пространством H .)

Таким образом для произвольной квантово-механической системы можно составить диагональную статистическую матрицу, и среднее значение наблюдаемой будет вычисляться через след этой матрицы с использованием полного набора ортогональных нормированных функций. При наличии вырожденных уровней энергии собственные значения на диагонали повторяются с учетом кратности вырождения. Для нахождения энтропии достаточно вычислить среднее от следа от статистической матрицы (8.2).

3 Каноническое распределение Гиббса

Механические состояния, совместимые с данным термодинамическим состоянием, составляют **статистический ансамбль**. Статистический ансамбль представлен в фазовом пространстве набором точек, распределение которых описывается плотностью вероятности. Оно даёт ответ о вероятности нахождения такого состояния всей системы, при котором данное тело находится в некотором определенном квантовом состоянии w_n с энергией E_n , в состоянии, описанном микроскопическим образом. Микроскопическое состояние внешней среды при этом не отслеживается. Каноническое распределение Гиббса основано на простом принципе: вероятность нахождения сложной системы 1-2 равна произведению вероятностей её подсистем 1 и 2: $\rho_{12} = \rho_1 * \rho_2$ (из чего следует удобство применения логарифмов для исследования сложной системы). Опираясь на этот постулат равновероятности всех доступных исследуемой системе микросостояний, вытекающий из симметрии, Гиббс вывел формулу:

$$w_n = \exp\left(\frac{F - E_n}{T}\right), \dots \rho = (2\pi h)^s \exp\frac{F - E(p, q)}{T} \quad (3.1)$$

До многоточия выше приведена функция распределения вероятности по энергии системы в состоянии E_n в

квантово-механическом представлении, после — в квазиклассическом представлении. Здесь

- ▶ $w_n(p, q)$ — вероятность нахождения в состоянии, соответствующему волновой функции с собственным значением
- ▶ E_n — энергия как функция от обобщенных координат,
- ▶ s — число степеней свободы.
- ▶ F — свободная энергия газа. (В термодинамике за счет разницы свободных энергий конечного и начального состояний газа совершается работа, что объясняет удобство использования этой переменной).
- ▶ ρ — плотность вероятности нахождения в конкретной фазовом дифференциале,

Любопытно отметить, что свободная энергия газа является простым следствием [условия нормировки](#) приведенного выше канонического распределения Гиббса. Это наглядный пример связи между математикой, теоретической физикой и лабораторным экспериментом. В термодинамике свободная энергия F , энтропия S , энергия E , объем V , давления P , температура T ряд других переменных выводятся друг из друга и контролируются. Первые три перечисленные переменные являются [аддитивными](#) функциями.

Возможно, что квазиклассическим является не все микроскопическое движение частиц, а лишь движение, соответствующее части степеней свободы, в то время как по остальным степеням свободы движение является квантовым. Например, может быть квазиклассическим поступательное движение молекул при квантовом характере внутримолекулярного движения атомов. В таком случае уровни энергии тела можно написать в виде функций от квазиклассических координат и импульсов $E(p, q)$.

Упомянутые выше распределения Больцмана и Максвелла являются частными случаями канонического распределения Гиббса. В первом случае в числителе дроби экспоненты подставляется с отрицательным знаком потенциальная энергия, во втором — кинетическая. В знаменателях в обоих случаях остаётся T либо kT .

В силу идентичности молекул газа при анализе распределения Максвелла достаточно рассмотреть фазовое пространство лишь одной молекулы, выразить энергию в импульсном представлении в координатах

$E = \frac{1}{2}m(px^2 + py^2 + pz^2) + \epsilon_k$, при этом ϵ_k -это энергия газа, поделенная на число молекул газа, k -ый уровень энергии одной молекулы, приходящаяся на её вращательные, колебательные степени свободы, собственный момент импульса элементарных частиц, спин и др. Далее интегрирование по обобщенным координатам dq системы можно заменить на простое умножение на объем сосуда — аналогичный алгоритм применяется для распределения Максвелла (8.6). Это значительно упрощает вычисления. В результате для нахождения свободной энергии F идеального газа (напомним, что разница свободной энергии конечного и начального состояния как раз равна совершенной работе за счет газа) используется следующая формула [9 форм. 31.3, 31.2]:

$$F = -NT \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} Z \right] = -NT \ln \frac{eV}{N} + Nf(T) \quad (3.2)$$

Где

- N — число молекул
- — абсолютная температура в энергетических единицах
- e — число Эйлера 2.718 . . .
- V — объем сосуда, m — масса молекулы
- $\hbar$ - приведенная постоянная Планка, равная $1.055 * 10^{-34}$ Дж *сек.
- Z — статистическая сумма, зависящая от энергетических уровней молекулы, её определение будет приведено ниже.

Начальные температура, объем и кол-во частиц рассматриваются как заданные извне параметры исследуемой системы. Альтернативное представление приведенной выше формулы заключается в выносе всех параметров в отдельную функцию, зависящую лишь от температуры $f(T)$.

Энтропия S определяется из термодинамических соотношений как частная производная со знаком минус от свободной энергии:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = N \ln \frac{eV}{N} - N \frac{df}{dT}(T) \quad (3.3)$$

Исходя из основных уравнений термодинамики, можно найти и другие термодинамические переменные исследуемой подсистемы, чем полностью определить либо задать её макроскопическое состояние.

4 Вырождение энергетических уровней

Когда разные волновые функции имеют одно и то же собственное значение энергии E_n , то это означает вырождение энергетического уровня. Показатель степени в формуле 4.1 соответствует кратности вырождения энергетического уровня, обозначаемый как статистический вес g_k . В этом случае часть формулы (1.1) содержит статистическую сумму, определяемую по формуле [10, стр. 35 форм. 1.71b]

$$Z = \sum_k g_k e^{-\epsilon_k/kT} \quad (4.1)$$

Условие нормировки для формулы (1.2) позволяет вычислить свободную энергию F через вероятности квантовых состояний:

$$1 = \sum_n w_n = e^{F/T} \sum_n e^{-E_n/T} \Rightarrow F = -T \ln \sum_n e^{-E_n/T} \quad (4.2)$$

Применим общую формулу (1.2) для вычисления свободной энергии идеального газа, подчиняющегося статистике Больцмана. Написав энергию n в виде суммы энергий молекул ϵ_k , можно свести суммирование по всем состояниям газа к суммированию по всем состояниям отдельной молекулы, как и в случае распределения Максвелла. Каждое состояние газа будет определяться набором N (N —

число молекул в газе) значений ϵ_k , которые в больцмановском случае можно считать все различными между собой (в каждом молекулярном состоянии — не более одной молекулы в силу ограничений, налагаемых волновыми функциями для фермионов, поскольку именно с такими объектами работает Барометрическая формула). Записав $e^{-\frac{E_n}{T}}$ в виде произведения множителей $e^{-\frac{\epsilon_k}{T}}$ для $\forall$ из молекул и суммируя независимо по всем состояниям каждой молекулы, мы получим выражение, соответствующее N

$$\left(\sum_k e^{-\epsilon_k/T} \right)^N = \sum_n e^{-E_n/T} = \frac{1}{N!} \left(\sum_k e^{-\epsilon_k/T} \right)^N \quad (4.3)$$

При этом все наборы N различных значений, отличающиеся лишь распределением одинаковых молекул газа по уровням ϵ_k соответствуют одному и тому же квантовому состоянию газа. Вместе с тем, в статистической сумме, в формуле, выше каждое из состояний должно учитываться лишь один раз. Поэтому мы должны еще разделить выражение полученное выражение на число возможных перестановок N молекул друг с другом, т. е. на N! и оценить значение с применением формулы Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

В результате такой оценки получим формулу для свободной энергии больцмановского идеального газа:

$$F = -NT \ln \left[\frac{e}{N} \sum_k e^{-\epsilon_k/T} \right] \quad (4.4)$$

В случае вырожденных энергетических уровней число повторов соответствующего значения ϵ_k равно кратности вырождения. Что произойдет с формулами (1.3) и (2.1) для смеси газов? Для ответа на поставленный вопрос обратится к большому каноническому распределению Гиббса с переменным числом частиц:

$$w_{n,N} = A \exp \frac{\Omega + \mu N - E_{n,N}}{T} \quad (4.5)$$

Здесь выше — функция распределения подсистемы одного идеального газа по двум переменным:

- значению энергии E_n и числа частиц N

- ▶ Ω - термодинамический потенциал
- ▶ T — абсолютная температура в энергетических единицах
- ▶ μ — химический потенциал молекулы.

Теперь определим функция распределения подсистемы смеси идеальных газов газа по переменным — значению энергии E_n и числа частиц N_1, N_2, N_3 - здесь также возможны вырожденные уровни энергии.

$$w_{n,N_1,N_2,\dots} = A \exp \frac{\Omega + \sum_i \mu_i N_i - E_{n,N_1,N_2,\dots}}{T} \quad (4.6)$$

Энергию n также можно представить в виде суммы энергий молекул ϵ_k , за счет чего свести суммирование по всем состояниям газа к суммированию по всем состояниям отдельной молекулы [[Ку607]]

[Ку607]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

Для смеси идеальных газов приведенные выше формулы остаются в силе, только вместо N подставляется количество молекул соответствующего газа. Для смеси газов обладают свойствами аддитивности следующие термодинамические переменные: число молекул, энергия, энтропия, парциальное давление каждого газа термодинамически потенциал и ряд других. При этом объем и температура по правилам термодинамики одинаковы для всех молекул каждого газа из смеси. Отметим, что благодаря отсутствию взаимодействия между молекулами происходит суммирование значений энтропии и соответственно, перемножение объёмов фазовых пространств (7.4) Легко проследить аналогию формулы (2.6) с логарифмом формулы (3.1) и убедиться в их подобии. Хотя формулы имеют небольшие отличия, но это не должно обескураживать. Подкрепляет такую уверенность формула, моделирующая фазовое пространство и энтропию (7.2). Пары произведений в (2.6) $\mu_i N_i$ под знаком суммы входят симметрично. В этой формуле можно произвести суммирование по всем состояниям энергетических уровней, а не молекул. Состояние энергетических уровней определяется квантово-атомными параметрами молекулы, изучаемых на уроках химии в школе.

Appendix

1 The Canonical Gibbs Distribution

The statistical ensemble is represented in phase space by a set of points whose distribution is described by the probability density. It gives an answer about the probability of finding a state of the whole system in which a given body in a certain quantum state w_n with energy E_n is in a state described in a microscopic way. The microscopic state of the external environment is not observed. The canonical Gibbs distribution is based on a simple principle: the probability of finding a complex system 1-2 is equal to the product of the probabilities of its subsystems 1 and 2: $\rho_{12} = \rho_1 * \rho_2$ (which implies the convenience of using logarithms to study a complex system). Based on this postulate of equal probability of all microstates available to the system under study, which follows from symmetry, Gibbs derived the formula:

$$w_n = \exp\left(\frac{F - E_n}{T}\right) \dots; \dots \quad (1.1)$$

$$\rho = (2\pi h)^s \exp \frac{F - E(p, q)}{T}$$

Before the semicolon above, the probability distribution function for the energy of the system in the state E_n is given in the quantum mechanical representation, after that in the quasi-classical representation.

Where

- $w_n(p, q)$ - the probability of being in a state corresponding to a wave function with eigenvalue
- E_n . - The energy as a function of the generalised coordinates,
- s is the number of degrees of freedom.
- F is the free energy of the gas. (In thermodynamics, work is done by the difference between the free energies of the final and initial states of the gas, which explains the convenience of using this variable).

1 The Canonical Gibbs Distribution	355
2 Degeneration of energy levels	357
3 Statistical matrix for arbitrary A, B and C	360
4 A group axiom for $\{\tilde{Z}(\beta)\}$	362

- ρ - Probability density of being in a given phase difference,

It is interesting to note that the free energy of a gas is a simple consequence of the normalisation condition of the above canonical Gibbs distribution. This is a clear example of the connection between mathematics, theoretical physics and laboratory experiments. In thermodynamics, free energy F , entropy S , energy E , volume V , pressure P , temperature T and a number of other variables are derived from and controlled by each other. The first three variables listed are additive functions.

It is possible that not all the motion of a microscopic particle is quasi-classical, but only the motion corresponding to some of the degrees of freedom, while for the rest of the degrees of freedom the motion is quantum. For example, the translational motion of molecules can be quasi-classical with the quantum nature of the intramolecular motion of atoms. In this case, the energy levels of the body can be written as functions of the quasi-classical coordinates and momentum $E(p, q)$.

The Boltzmann and Maxwell distributions mentioned above are special cases of the canonical Gibbs distribution. Due to the identity of the gas molecules, when analysing the Maxwell distribution, it is sufficient to consider the phase space of only one molecule and to express the energy in the impulse representation in coordinates

$E = \frac{1}{2}m(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \epsilon_k$, where ϵ_k is the energy of a gas divided by the number of gas molecules, the k -th energy level of a molecule due to its rotational and vibrational degrees of freedom, the intrinsic angular momentum of elementary particles, spin, etc. Furthermore, integration in the generalised coordinates of the dq system can be replaced by simple multiplication by the volume of the vessel - a similar algorithm is used for the Maxwell distribution (7.6). This greatly simplifies the calculations. As a result, the following formula is used to find the free energy F of an ideal gas (remember that the difference free energy of the final and initial states is just the perfect work due to the gas) [8 forms 31.3, 31.2]:

$$\begin{aligned}
 F &= -NT \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} Z \right] \\
 &= -NT \ln \frac{eV}{N} + Nf(T) \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Where

- ▶ N - number of molecules
- ▶ T is the absolute temperature in energy units
- ▶ e is the Euler's number 2.718 ...
- ▶ V is the volume of the vessel, where m is the mass of the molecule
- ▶ $\hbar$ - the reduced Planck constant equal to $1.055 * 10^{-34}$ J*sec.
- ▶ Z is a statistical sum depending on the energy levels of the molecule, its definition will be given below.

The initial temperature, volume and number of particles are considered as external parameters of the system under study. An alternative representation of the above formula is to put all the parameters into a separate function that depends only on the temperature $f(T)$.

The entropy of S is determined from thermodynamic relations as a partial derivative with a minus sign of the free energy:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = N \ln \frac{eV}{N} - N \frac{df}{dT}(T) \quad (1.3)$$

On the basis of the fundamental equations of thermodynamics, it is possible to find other thermodynamic variables of the subsystem under study, rather than to completely determine or set its macroscopic state.

2 Degeneration of energy levels

When different wave functions have the same eigenvalue of the energy E_n , it means that the energy level is degenerate. The exponent in the formula 3.1 corresponds to the multiplicity of the energy level degeneracy, called the statistical weight g_k . In this case, part of the formula (1.1) contains a statistical sum determined by the formula [9, p. 35 of form 1.71b].

$$Z = \sum_k g_k e^{-\epsilon_k/kT} \quad (2.1)$$

The normalisation condition for the formula (1.2) allows us to calculate the free energy F from the probabilities of the quantum states:

$$1 = \sum_n^N w_n = e^{F/T} \sum_n^N e^{-E_n/T} \rightarrow F = -T \ln \sum_n^N e^{-E_n/T} \quad (2.2)$$

Let's use the general formula (1.2) to calculate the free energy of an ideal gas obeying Boltzmann's statistics. By writing the energy E_p as the sum of the energies of the molecules ϵ_k , it is possible to reduce the summation over all states of the gas to the summation over all states of a single molecule, as in the case of the Maxwell distribution. Each state of the gas is determined by a set of N (N is the number of molecules in the gas) values of ϵ_k , which in the Boltzmann case can all be considered to be different from each other (in each molecular state - no more than one molecule, due to the limitations imposed by the wave functions for fermions, since it is with such objects that the barometric formula works). If we write $e^{-\frac{E_n}{T}}$ as a product of the multipliers of $e^{-\frac{\epsilon_k}{T}}$ for $\forall$ of molecules and sum independently over all states of each molecule, we get an expression corresponding to N

$$\left(\sum_k e^{-\epsilon_k/T} \right)^N = \sum_n e^{-E_n/T} = \frac{1}{N!} \left(\sum_k e^{-\epsilon_k/T} \right)^N \quad (2.3)$$

At the same time, all sets of N different values, differing only in the distribution of identical gas molecules over the levels of ϵ_k , correspond to the same quantum state of the gas. However, in the statistical sum, in the formula above, each of the states should be taken into account only once. Therefore, we must also divide the expression obtained by the number of possible permutations of N molecules with

each other, i.e. by $N!$, and evaluate the value with Stirling formula $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

As a result of this estimation, we obtain a formula for the free energy of a Boltzmann ideal gas:

$$F = -NT \ln \left[\frac{e}{N} \sum_k e^{-\epsilon_k/T} \right] \quad (2.4)$$

In the case of degenerate energy levels, the number of repetitions of the corresponding value is ϵ_k , it is equal to the multiplicity of the degeneracy. What happens to the formulae (1.3) and (2.1) for a mixture of gases? To answer this question we turn to the Large canonical Gibbs distribution with a variable number of particles:

$$w_{n,N} = A \exp \frac{\Omega + \mu N - E_{n,N}}{T} \quad (2.5)$$

Here above is the distribution function of the subsystem of an ideal gas over two variables:

- for the energy value E_n and the number of particles N
- Ω - thermodynamic potential
- T - absolute temperature in energy units
- μ is the chemical potential of the molecule.

Now let's define the distribution function of the subsystem of a mixture of ideal gases of a gas by variables - the energy value E_n and the number of particles N_1, N_2, N_3 - degenerate energy levels are also possible.

$$w_{n,N_1,N_2,\dots} = A \exp \frac{\Omega + \sum_i \mu_i N_i - E_{n,N_1,N_2,\dots}}{T} \quad (2.6)$$

The energy of E_p can also be represented as the sum of the energies of the ϵ_k molecules, reducing the summation over all gas states to the summation over all states of a single molecule.

For a mixture of ideal gases, the above formulae remain valid, only the number of molecules of the corresponding gas is replaced by N [9]. For a mixture of gases, the following thermodynamic variables have additive properties: number of molecules, energy, entropy, partial pressure of each gas, thermodynamic potential and so on. In this case, according to the rules of thermodynamics, the volume and temperature are

the same for all the molecules of each gas in the mixture. Note that, due to the absence of interaction between molecules, the entropy values are summed up and, accordingly, the volumes of the phase spaces are multiplied (7.4).

It is easy to trace the analogy of the formula (2.6) with the logarithm of the formula (3.1) and check their similarity. Although the formulas have slight differences, this should not be discouraging. This confidence is supported by a formula modelling phase space and entropy (7.2). Pairs of products in (2.6) $\mu_i N_i$ under the sign of the sum enter symmetrically. In this formula it is possible to sum all states of energy levels, not molecules. The state of the energy levels is determined by the quantum-atomic parameters of the molecule, which you learned in high school chemistry.

3 Statistical matrix for arbitrary A, B and C

It is possible to map a quantum mechanical system onto linear maps $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Let's move from Euclidean space to Hilbert space.

Here, orthogonal vectors are an orthonormal system of functions, so that any operator $\widehat{Q}$ is expressed in terms of $\langle n|\widehat{Q}|m\rangle = \int \psi_n^* \widehat{Q} \psi_m dq$ is explicitly time-independent and commutes with the Hamiltonian, then its matrix elements

$\langle n|\widehat{Q}|m\rangle$ do not change with time. This is the quantum form of motion integrals. It is important to note that in our case all the eigenvalues of λ , i.e. the energies of the microstates, are real, which means that the H Hermite operator. The remarkable property of the Hermite operator ensures the commutativity of the Hamiltonian with a number of operators, such as energy and entropy. Note that the time derivative of the statistical matrix commutes with the Hamiltonian:

$$[\widehat{H}, \widehat{w}] = 0 \quad (3.1)$$

For the physical phenomena under consideration, this condition is fulfilled. And the result is a quantum mechanical analogue of Liouville's theorem: the commutativity of an operator on any quantity with a Hamiltonian is precisely the quantum

mechanical expression of the persistence of that quantity in time.

The eigenvalue of λ_i corresponds to the energy of the subsystem E_i . And as you can easily guess, the sum of the eigenvalues on the main diagonal is the energy of the whole system E (energy is also an additive variable)

The eigenvalue of λ_i corresponds to the energy of the subsystem E_i . And as you can easily guess, the sum of the eigenvalues on the main diagonal is the energy of the whole system E (energy is also an additive variable)

$$\widehat{H}\psi = E\psi \quad (3.2)$$

The eigenvalues of the Hamiltonian of a system consisting of two subsystems are usually written as follows

$$\widehat{H}|n, m\rangle = (E_1 + E_2)n.m > \quad (3.3)$$

This formula can be extended to the case of a number of subsystems and the analogy with invariant subspaces can be verified, see (9.4).

To find a statistical matrix for arbitrary numbers A, B, C , first assume that the system is in a pure quantum state with a wave function $\langle n|\widehat{\psi}|m\rangle$. The probability distribution for the coordinates is given by the square of the module:

$$|\psi|^2 = \sum c_m^* \cdot c_n \psi_m^* \psi_n \quad (3.4)$$

Where the product of the coefficients of the expansion of the wave function ψ according to the system of orthonormal (basis) c_m and c_n can be replaced by the probability w_{nm} . As a result, we get the following formula for the probability distribution by coordinates (keeping the diagonal elements of the statistical matrix)

$$\sum \sum w_{mn} \psi_m^* \cdot \psi_n = \sum \psi_n^* \widehat{w} \psi_n \Rightarrow dw_q = \sum \psi_m^* \widehat{w} \psi_m dq \quad (3.5)$$

In an expression written in this form, any complete system of normalised wave functions can be used as functions of ψ_n . The task of determining the statistical distribution is reduced to calculating the probabilities $w_n = w_{nn}$, which represent the desired distribution function in quantum statistics. The formula for the mean of an arbitrary value f is simplified:

$$\langle f \rangle = \sum w_n f_{nn} \quad (3.6)$$

Therefore, to find the entropy, it is sufficient to calculate the average of the trace from the statistical matrix (7.2).

4 A group axiom for $\{\tilde{Z}(\beta)\}$

The preceding clause, designated as 6 is to be referenced. Z-sums are defined as density matrices (operators). And for a composite system of independent subsystems, the general density matrix is formed according to the rules tensor product of matrices [Vin03]:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{Total}} &= \bigotimes_{i=1}^m \underline{Z}_i \\ \text{tr}(\underline{Z}_{\text{Total}}) &= \text{tr}(\underline{Z}_1) \cdot \text{tr}(\underline{Z}_2) \cdot \dots \cdot \text{tr}(\underline{Z}_m) \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

In this case, expressions of the form will be written for each element on the diagonal of the resulting matrix:

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_1 \otimes \underline{Z}_2 \otimes \underline{Z}_3 \dots)_{(i,j,k\dots),(i,j,k\dots)} &= \\ z_1(i,i) \cdot z_2(j,j) \cdot z_3(k,k) \dots &= \\ e^{-\beta E_i} e^{-\beta E_j} e^{-\beta E_k} \dots \frac{1}{p_i} \frac{1}{p_j} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note: According to fundamental theorem of arithmetic canonical form for natural $\forall a \in \mathbb{N}$, $a = \prod_p p^{\alpha(p)}$. The last formula provides an interpretation of the definition of the ζ -function 1.2.

The product of (normalized $\tilde{Z}$, for which the formulas mentioned above are similar) statistical sums is unambiguous up to permutations, since they are Abelian matrices that have the property of commutativity, associativity by multiplication.

In order to establish a group axiom for $\{\tilde{Z}(\beta)\}$, it is necessary to demonstrate the existence of an inverse element $\forall$ element: $\exists$ inverse element for $\forall \tilde{Z}(\beta) \exists \tilde{Z}_i(\beta)^{-1}$ and would consequently indicate that $\{\tilde{Z}(\beta)\}$ should be a field. According to the proposition stated in Lemma 7 a ring $\mathbb{Z}_n$ is a field only if n is a prime number $\implies \tilde{Z}_i(\beta) = tr(\underline{Z})$ and $\underline{Z}$ must be generated by the prime numbers $g_i = \frac{1}{p_i}$.

In the model under consideration, the normalised partition function $\tilde{Z}(\beta)$ can be regarded as a character 5 of an Abelian cyclic energy group $\hat{E}$ 7.5: $G = \mathbb{Z}_{E_{total}}$. Indeed for an Abelian group G , characters are homomorphisms $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$. In statistical physics:

$$\tilde{Z}(\beta) = \sum_{k=0}^{E_{Total}} r_k e^{-\beta \Delta E} \quad \Delta E = 1 \quad (4.3)$$

where r_k is the multiplicity of energy level k . This is a sum of characters $\chi_k(\beta) = e^{-\beta k}$, each corresponding to a one-dimensional representation $\rho_k : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ where:

$$\rho_k(m) = \exp\left(i2\pi \frac{k_m}{E_{Total}}\right), \quad i = \sqrt{-1} \quad (4.4)$$

This model rigorously describes fluctuations, level degeneracy, and state transitions via abstract algebra including:

- addition operation $\tilde{Z}_A + \tilde{Z}_B$ is valid, corresponding to $\rho_A \oplus \rho_B$. Physically: System in state A or B .
- Convolution of sums is distributive: $(\tilde{Z}_A + \tilde{Z}_B) * \tilde{Z}_C = \tilde{Z}_A * \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_B * \tilde{Z}_C$.
- Tensor products (interacting systems),
- Fourier transforms (fluctuation analysis),
- Automorphism composition (symmetries).

The set $\tilde{Z}$ forms a commutative algebra linked to representation theory of G . In our investigation We can extend the definition of the character of reduced residue classes modulo $[m]$ to all integers $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \chi(a) = \chi(b) \iff a \equiv b \pmod{m} \\ \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \\ \chi(a) = 0 \quad \text{if } (a, m) > 1 \\ \chi(a) \neq 0 \quad \text{if } (a, m) = 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

The definition given above corresponds to the concept of a Dirichlet character. The function $\chi(a)$ is defined on $\mathbb{Z}$ and has the following properties:

- ▶ Periodicity: $\chi(a + b) = \chi(a) + \chi(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
- ▶ Complete multiplicativity: $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
- ▶ Vanishing: $\chi(n) = 0$ if $(n, m) > 1$.

It is evident that the formation of a multiplicative Abelian group occurs as a consequence, which is analogous to the group of reduced residue classes modulo m ($\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$).

14 Послесловие. Afterword

1 Поиск истины тернист

Нарастающее открытое военное противостояние России с Западом позволило сбросить "розовые очки" не только с экономических теорий ("невидимая рука рынка" Адама Смита, западное общество социального благоденствия и социальное государство Отто фон Бисмарка, "бремя белого человека" просвещать "джунгли" по Редьяру Киплингу и Жозефу Боррелю и т.д.), но и целого ряда мифов Западной исключительности, в том числе в сферах точных наук, в технике и военном деле.

Доказательство Великой теоремы Ферма, относимого к «математическим жемчужинам», имеет важное символическое, историческое и педагогическое значение. Необычайная красота и лаконичность формулировки Вплоть до 2020г. во всём мире господствовало предубеждение, что краткого доказательства Великой теоремы не существует. Но оказалось, что утверждение Пьера де Ферма — это не фигура речи, что его слова «о воистину чудесном доказательстве» следует понимать буквально школьнику XXI века, знакомому с основами логики, геометрии, размерности, теорией множеств. Математик вовсе не «заливал», говоря о возможности записи основных идей доказательства на полях книги. Да, по состоянию на 1637г. ещё не были разработаны дифференциальное и интегральное исчисления (они в доказательства автора неявно используются), не было теории чисел, теории множеств, топологии - всё это было открыто много позже, но французский математик сделал первые шаги в становлении областей этих математических наук.

1 Поиск истины тернист	
нист	365
2 The pursuit of veracity	366

Приведенное автором доказательство впервые сделано и опубликовано в России, оно останется в составе интеллектуального потенциала нашей страны. Публикации автора на русском и английском языках были предприняты для укрепления авторитета российской науки во всём мире, развенчания мифа о гегемонии США во всех научных сферах, стереотипа о вторичности Российской науки. Поиск Истины — это непрерывный процесс, а не догма, и этот поиск не прекращается даже после раздачи самых высоких наград. Автор выражает надежду, что приведенный кейс позволит не только ощутить красоту точных наук, логики и философии любознательным школьникам, но и обратит внимание научного сообщества, законодателей и органов власти на важность нормативного регулирования сферы защиты интеллектуальной собственности в виде открытий в любом суверенном государстве.

Все перечисленные интриги, препятствия, уловки - лишь "мимолётные явления" по сравнению с громадными планами и грандиозными открытиями, изобретениями, которые сделает подрастающее поколение нашей страны. Автор убеждён в огромном скрытом потенциале нашего народа. Именно на дерзких молодых людей с творческим мышлением рассчитана эта работа. Ссылка на сайт с источником публикации Сайт Союз СЦМ emediator.ru
<https://emediator.ru>

2 The pursuit of veracity

The pursuit of veracity is beset with challenges. The subsequent open military confrontation between Russia and the West permitted the removal of the "rose-colored glasses" from economic theories, including Adam Smith's "invisible hand of the market," Otto von Bismarck's Western society for social welfare and the welfare state. The notion of the "burden of the white man" to enlighten the "jungle" (as posited by Rudyard Kipling and Josep Borrell, among others) is just one example of the many myths surrounding Western exclusivity. These myths extend to a number of fields, including exact sciences, technology and military affairs.

The proof of Fermat's Great Theorem, which is regarded as a significant contribution to mathematical knowledge, holds considerable symbolic, historical and pedagogical importance.

The exceptional eloquence and succinctness of the wording will remain in place up to 2020. It was widely believed that there was no concise proof of the theorem. However, it subsequently became evident that Pierre de Fermat's assertion was not a figure of speech. His assertion that a truly remarkable proof existed should be taken at face value by a contemporary schoolboy versed in the fundamentals of logic, geometry, dimensionality and set theory. The mathematician did not "fill in" at all, merely suggesting the possibility of recording the essential elements of the proof in the margins of the book. Indeed, as of 1637, differential and integral calculus had yet to be developed (they are implicitly utilised in the author's proof), number theory, set theory and topology had not yet been established – all of which were subsequently discovered at a later date. However, the French mathematician was the first to lay the foundations for these mathematical sciences.

The proof presented by the author was initially developed and published in Russia and will continue to contribute to the intellectual legacy of our country. The author's publications in Russian and English were undertaken with the objective of enhancing the reputation of Russian science on the global stage, challenging the notion of US dominance in all scientific domains, and challenging the perception of Russian science as a secondary field.

The pursuit of truth is an ongoing endeavour, not a fixed doctrine, and this pursuit continues even after the conferral of the highest accolades. The author expresses the hope that the presented case will not only allow curious schoolchildren to experience the beauty of exact sciences, logic and philosophy, but also draw the attention of the scientific community, legislators and authorities to the importance of regulating the sphere of intellectual property protection in the form of discoveries in any sovereign state.

These intrigues, obstacles, and tricks are merely "fleeting phenomena" in the context of the ambitious plans, groundbreaking discoveries, and innovative inventions that the younger generation of our country will undoubtedly make. The author is convinced of the enormous untapped potential of our people. This work is designed for the bold and innovative young minds who are ready to embrace new ideas and challenge the status quo.

Review

3 Review of Monograph

Review of Monograph 'An introduction to number theory from the perspective of statistical physics. Prime numbers as the metalanguage of the universe' by M.A. Avdyev's

In contrast to the prevailing skepticism within Western scientific doctrine, these phenomena have been demonstrated to be substantiated from the standpoint of statistical physics and symmetry, grounded in the overarching principles that underpin the universe. The presentation is accompanied by references to the general education school curriculum, which facilitate comprehension of the general principles of proof for middle and high school students.

The topic is of great practical and theoretical interest, since in recent years society has placed special demands on mathematical education, information technology, the synthesis of exact sciences and humanities, as well as the issues of reforming school and university education, responding to the challenges facing modern society. In Chapter 2 of the monograph, which describes the search for a proof of Fermat's Great Theorem (VTF), the author employs knowledge primarily derived from the framework of school curricula in classes that offer in-depth physical and mathematical training. The author eschews the use of higher mathematics, focusing instead on a wide readership. For the sake of clarity, the author has translated the text into English in Chapters 7-9 and 11 of the monograph. The author employs analogies and three-dimensional modelling, in addition to program code, to elucidate the axioms of mathematics and the concepts of fundamental physics, progressing from experimentation to fundamental generalisations. In addressing the set pedagogical task, the author also explores other school subjects, including physics, architecture and drawing, earth science, history and fine arts, to elucidate significant concepts that have become obscured within the purview of Western science, which has become increasingly focused on competence-based and narrowly sectoral approaches. Consequently, the reader is able to accompany the author on a challenging journey of scientific research and observe familiar concepts from an unconventional vantage point. This approach facilitates comprehension of the inherent conflict of form and content in the VTF, as posited by the author. The ABC hypothesis, expounded in Chapter 5 in Russian and Chapter 9 in English, is intended for a more prepared reader, namely students of two or three technical university courses or school teachers of physics and mathematics subjects. However, the "key idea" of the proof is presented at the commencement of each of the chapters of the monograph. This idea consists of considering the formulation of the ABC hypothesis from the standpoint of experiment and random errors inevitable in each dimension, which are based on the uncertainty principle from quantum mechanics.

Furthermore, the author differentiates between significant concepts pertaining to communication and interaction, isolation, and the division of a shared resource. In this context, prime numbers are conceptualised as a construct of phase space. Additionally, the author employs a statistical matrix and entropy, providing a comprehensive account of their calculation through matrix logarithm and averaging in accordance with established mathematical statistical principles. These principles are utilised by both schoolchildren and students engaged in laboratory research when assessing measurement error. This leads the author to an unconventional conclusion: that the indicator of the "quality of the three" used in the formulation of the ABC conjecture is, in fact, a "defect" and the result of fluctuation – deviation of a random variable from its mathematical expectation. In general, the indicator of the "quality of the three" does not exceed one, and deviations are limited from above by a random function with a normal distribution in accordance with the Law of Large Numbers. This is the author's main conclusion, which provides support for the ABC conjecture through detailed calculations, numerical estimates, and software simulation. In order to interpret the found proof of the ABC conjecture, the author also refers to the I and II principles of thermodynamics, the adiabatic equation and the constancy of entropy in the operation of an the classical Carnot heat engine. The author's synthesis of school knowledge of thermodynamics, the basics of statistical physics and mathematical statistics, and the algebra of matrices and linear operators, widely used in quantum mechanics, facilitates comprehension of the material by a wide readership and enables the elucidation of fundamental concepts to high school students. The distinctive feature of the author's approach is not only the presentation of intricate mathematical concepts in straightforward language (which may occasionally compromise mathematical rigour), but also the consistent reference to fundamental physical concepts. The author highlights the intrinsic link between the experiment and "pure mathematics underscoring its pivotal role in fundamental scientific inquiry. This distinguishes the monograph from the "dry" mathematical proofs that are strictly formulated but often inaccessible to a wide audience. For example, the work cited by the author, Shinichi Mochizuki, a mathematician from Kyoto University, dedicated to the search for a proof of the ABC conjecture, has five hundred pages and, apart from special testing programs based on artificial intelligence, has been read by only ten narrow specialists. In Chapters 10 and 11 of the monograph, the author presents a number of illustrative examples of biases in science, the prevalence of erroneous scientific theories during specific historical periods, and elucidates the distinctions between the definitions of "generally recognized" and "true". The author demonstrates that general recognition is not a criterion of truth by presenting a case study on the protection of intellectual property rights. This case study reveals legal gaps in the current regulatory system and indicates the negative practice of ex-territorial application of US law, which is guided by unspoken rules. The author highlights the necessity for further normative work, taking into account the positive experience of the USSR in the context of the imposed existential conflict of our country with the elites of the countries of the United West, which is a perspective that is difficult to refute. In the same chapters of the monograph, philosophical questions about the place of prime numbers in the universe are considered, and the potential for further research at the intersection of mathematics, physics, and epistemology is identified. The monograph is well structured, with the material and references to the literature used

conveniently formatted. The most difficult to understand questions of quantum mechanics and statistical physics are placed in appendices, and a logical connection between the chapters of the monograph and appendices is clearly delineated. The electronic version includes hyperlinks to figures, tables, formulas, and applications, which are particularly useful. The author employs general scientific terminology throughout. The monograph comprises an introduction, seven sections, two appendices, an afterword, and a list of approximately nine dozen relevant literature sources. It is recommended for publication in the Scientific Electronic Library eLibrary and printing as part of scientific publications.



The reviewer: Alfred I. Kreyk, PhD, Associate Professor (academic title, full name, signature) September 23, 2024

Литература и др. источники

Список литературы в алфавитном порядке фамилия автора, год издания.

- [ABC] ABChome. Волонтерская сеть под названием ABC-home посвящен распределенному вычислительному проекту, который должен был составить полный список всех троек ABC, состоящих из целых чисел, состоящих максимум из 18 цифр. url: <https://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/abc/index.php>.
- [Apo13] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Avd22] Marat Avdyev. «The Diophantine Equation From the Eye Of Physicist». В: Сборник Нижневартковского госуниверситета по результатам выступления на научной конференции (2022).
- [Avd24] Marat Aleksandrovich Avdyev. «How can a student prove the ABC hypothesis using prime numbers, quantum mechanics and creative imagination?» В: Scientific studies and modern education (май 2024), с. 8—28. doi: [10.21661/r-562378](https://doi.org/10.21661/r-562378).
- [Avd25] M. A. Avdyev. Fermat's Last Theorem and the ABC hypothesis in School XXI. Prime numbers as the metalanguage of the universe. Union Siberian Center of mediation, 2025.
- [BG94] Nigel Boston и Andrew Granville. «The World's Most Famous Math Problem (The Proof of Fermat's Last Theorem and Other Mathematical Mysteries)i By Marilyn vos Savant». В: The American Mathematical Monthly 102.5 (1994). Под ред. Nigel Boston, с. 470—473. doi: [10.1080/00029890.1995.12004604](https://doi.org/10.1080/00029890.1995.12004604).

- [BP09] NV Bugel и In G Pin. Legal Statistics: Textbook. 2009.
- [BS86] Zenon Ivanovich Borevich и Igor Rostislavovich Shafarevich. Number theory. Academic press, 1986.
- [Cha74] Komaravolu Chandrasekharan. Introduction to Analytic Number Theory. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. World Scientific, 1974.
- [Der09] John Derbyshire. Prime obsession: Bernhard Riemann and the greatest unsolved problem in mathematics. 2009.
- [Fer95] Enrico Fermi. Notes on quantum mechanics. University of Chicago Press, 1995.
- [Gil00] David Gilbert. «Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900». В: Arch. der Math. und Physik 1 (1900), с. 44—63.
- [Gmu68] V Gmurman. Fundamentals of probability theory and mathematical statistics Translated by Scripta Technica Ltd. Под ред. I. I. Berenblut. American Elsevier Pub. Co Fundamentals of probability theory и mathematical statistics, 1968.
- [Han11] Jesper Schmidt Hansen. GNU Octave Beginner’s Guide. Под ред. UK. Birmingham B27 6PA. 2011.
- [Har17] Kevin Hartnett. «Mathematicians Explore Mirror Link between Two Geometric Worlds». В: The Best Writing on Mathematics 2019. Под ред. quantamagazine.org. Princeton University Press, 2017, с. 74—80. doi: [10.1515/9780691197944-007](https://doi.org/10.1515/9780691197944-007).
- [Hud63] Derek J Hudson. Lectures on elementary statistics and probability. Тех. отч. CERN, 1963.
- [Izu18] Dmitry Anatolyevich Izutkin. «Epidemics in the Classical Middle Ages in Europe». В: Medical Almanac 6 (57) (2018), с. 34—37.
- [Kre] Alfred Iosifovich Kreik. В: Bulletin of Economics, Law and Sociology ().
- [Kub07] Ryogo Kubo. «Statistical Mechanics: A Modern Course with Problems and Solutions». В: под ред. X. Ichimura, Ts. Usui и N. Hashizume. Elsevier, 2007.
- [KW61] Aleksandr Aleksandrovich Kharkevich и George Weiss. Spectra and analysis. American Institute of Physics, 1961.
- [KZ22] YU Karavaeva и OA Zheludova. «GREEN FINANCE OF RUSSIA». В: (2022), с. 64—67.
- [Lan01] Landau. Mechanics. Theoretical Physics In 10. Vol. T. 1. Landau2001: FIZMATLIT, 2001, с. 224.
- [LL02] Lev D. Landau и Evgeny M. Lifshitz. Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics. 3rd. Fizmatlit, 2002.
- [MC85] D Masser и W Chen. «Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory / W. W. L. Chen. — London:» в: Open problems 25 (1985).
- [Mes14] Albert Messiah. Quantum mechanics. Courier Corporation, 2014.

- [Moc21] Shinichi Mochizuki. «Mochizuki's proof of ABC-conjecture.» B: Research in the Mathematical Sciences Vol 57.No. 1/2, (2021), с. 12. doi: [10.1186/s40687-016-0057-x](https://doi.org/10.1186/s40687-016-0057-x).
- [Mys72] Anatoli Dmitrievich Myshkis. Introductory Mathematics for Engineers. Lectures in Higher Mathematics. Mir Publishers, 1972.
- [OS88] A. M. Odlyzko и A. Schönhage. «Fast algorithms for multiple evaluations of the Riemann zeta function». B: Transactions of the American Mathematical Society 309.2 (1988), с. 797—809. doi: [10.2307/2000939](https://doi.org/10.2307/2000939).
- [Osi04] Yu S Osipov. Большая российская энциклопедия. 2004.
- [Osi06] Iuri S Osipov. The Russian Academy of Sciences, 2006 Update. 2006.
- [PH95] Roger Penrose и Rolland Hurlbut. «Shadows of the mind: a search for the missing science of consciousness». B: Relations Industrielles 50.3 (1995), с. 677—680.
- [Pon86] Lev Semenovich Pontryagin. Generalizations of numbers. Science, 1986.
- [PTC09] Mariia Ivanovna Petrashen, Evgenii Dmitrievich Trifonov и Serge Chomet. «Applications of Group Theory in Quantum Mechanics». B: Courier Corporation, 2009.
- [Pto+98] Claudius Ptolemy и др. Almagest: or a mathematical essay in thirteen books. Science, 1998.
- [Rem21] Grant N. Remmen. «Amplitudes and the Riemann Zeta Function». B: Phys. Rev. Lett. 127 (24 дек. 2021), с. 241602. doi: [10.1103/PhysRevLett.127.241602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.241602).
- [Rie48] Bernhard Riemann. «Collected Papers». B: под ред. V. L. Goncharova. Moscow: OGIZ Gosudarstvennoe Izdatelstvo Tekhniko-Teoreticheskoi Literatury, 1948.
- [Sad04] VA Sadovnichy. Theory of operators, Moscow: Drofa. Moscow University Press, 2004.
- [Sel03] Fedor Andreevich Selivanov. The search for the wrong and the right. Publishing house of Tyumen State University, 2003.
- [SHA91] Oswald Spengler, Arthur Helps и Charles Francis Atkinson. The decline of the West. Oxford University Press, USA, 1991.
- [Szi02] Ferenc Szidarovszky. Introduction to Matrix Theory: With Applications to Business and Economics. Под ред. Sandor Molnar. Concrete and Applicable Mathematics) First Edition by Sandor Molnar. World Scientific Publishing Company, 2002.
- [Tak08] LA Takhtajan. Quantum mechanics for mathematicians Graduate Studies in Mathematics vol 95 (Providence, RI: American Mathematical Society). 2008.
- [Tak11] Leon Armenovich Takhtadzhian. Quantum mechanics for mathematicians. T. 95. American Mathematical Soc., 2011.
- [Tit86] EC Titchmarsh. The theory of the Riemann zeta-function. The Clarendon Press Oxford University Press, 1986.

- [Van03] Bartel Leendert Van der Waerden. Algebra. Т. 2. Springer Science & Business Media, 2003.
- [Vin03] Ernest Borisovich Vinberg. A course in algebra. Т. 56. American Mathematical Soc., 2003.
- [Vla] Vasilin Vladimirov. Equations of mathematical physics.
- [Wil95] Andrew Wiles. «Modular Elliptic Curves and Fermat’s Last Theorem». В: The Annals of Mathematics 141.3 (май 1995), с. 443. doi: [10.2307/2118559](https://doi.org/10.2307/2118559).
- [Zad69] Nikolai Zadornov. The first discovery. To the ocean. Historical Novel Library, 1969.
- [Авд20] Марат Александрович Авдыев. «Базы данных для ЭВМ Доказательство теоремы Ферма для Миллиардов на основе школьных знаний 11.03.2020». Russian. Пат. 2020621077 (<https://new.fips.ru/registers>). 2020.
- [Авд23] МА Авдыев. «Великая головоломка, как индикатор суверенизации Российской науки». В: Интерактивная наука 4 (80) (2023), с. 68—75.
- [АО 62] Ю. В. Линник АО Гельфонд. Элементарные методы в аналитической теории чисел. 1962.
- [АР87] К Аэрленд и М Роузен. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
- [ББ09] НВ Бугель и ВГ Булавчик. Правовая статистика: Учебное пособие. 2009.
- [Бор+85] Шафаревич Боревиц ЗИ и др. Теория чисел. Наука, 1985.
- [Бух13] Александр Адольфович Бухштаб. Теория чисел. Рипол Классик, 2013.
- [Ван79] Бартел Лендерт Ван дер Варден. Алгебра. 1979.
- [Вей72] Андре Вейль. Основы теории чисел. Мир, 1972.
- [Вин02] ЭБ Винберг. Курс алгебры. 3-е изд. Т. 544. 2002.
- [Вин18] Иван Матвеевич Виноградов. Основы теории чисел. Litres, 2018.
- [Вир10] Нецветаев Н Ю Харламов В М Виро О Я Иванов О А. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 352 с, 2010.
- [Вор+88] ИИ Воробьев и др. Задачи по физике. М.: Наука, 1988.
- [Гал15] Григорий Александрович Гальперин. Многомерный куб. 2015, с. 80.
- [Гму23] В Е Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Т. 12-е изд. — Москва : Издательство Юрайт. 2023.
- [Гри04] Брайан Грин. Элегантная вселенная. 2004, с. 286.
- [ГСМ78] С.Л. ГРЕЙТЦЕР Г.С.М. КОКСЕТЕР. Новые встречи с геометрией. Москва. Наука, 1978.
- [Деп65] Иван Яковлевич Депман. История арифметики. Просвещение, 1965.

- [Дер10] Д. Дербишир. Простая одержимость : Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике / Д. Дербишир ; Джон Дербишир ; пер. Пер. Alexey Semikhatov. – с англ. Алексея Семихатова. – Москва: Астрель, – 463 с, 2010.
- [Дио07] Александрийский Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах. URSS, 2007.
- [ЖВ22] Виктор Жаринов и Василий Владимиров. Уравнения математической физики. Litres, 2022.
- [Зад69] Николай Задорнов. Первое открытие. К океану. Библиотека исторического романа, 1969.
- [Зел02] В. Г. Зелевинский. Лекции по квантовой физике. Под ред. Новосибирский государственный университет. НГУ, 2002.
- [Зел10] Я. Б. Зельдович. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике ФИЗМАТЛИТ. 2010.
- [Изу18] Дмитрий Анатольевич Изуткин. «Эпидемии в эпоху классического средневековья в Европе». В: Медицинский альманах 6 (57) (2018), с. 34–37.
- [Кар76] В. П. Карцев. Максвелл/Серия: Жизнь замечательных людей.- М. 1976.
- [Кар83] А. Л. Карацуба. Основы аналитической теории чисел. Рипол Классик, 1983.
- [КЖ22] Ю. А. Караваева и О. А. Желудова. «ЗЕЛЕННЫЕ ФИНАНСЫ РОССИИ». В: (2022), с. 64–67.
- [Кин] Мариус Кинтел. OpenSCAD - это программа для создания твердотельных 3D-моделей САПР. Это свободное программное обеспечение распространяется под лицензией GPL работает под операционными системами Linux / UNIX, Windows и Mac OS X. url: <https://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/abc/index.php>.
- [Кол65] Михаил Сергеевич Колесников. Лобачевский. Молодая гвардия, 1965.
- [Кре21] Альфред Иосифович Крейк. «Некоторые теоретико-методологические основы рассмотрения синергии в социуме». В: Вестник экономики, права и социологии 1 (2021), с. 149–152.
- [Куб07] Р. Кубо. Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме. 2007.
- [Кур13] Александр Геннадиевич Курош. Курс высшей алгебры. Издательство Лань, 2013.
- [ЛАЛ69] Лев Давидович Ландау, А. И. Ахиезер и Евгений Михайлович Лифшиц. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. Наука, 1969.
- [Лан02] Лифшиц Ландау. Теоретическая Физика В 10т. Том 5. Статистическая Физика. Под ред. Физматлит. Лифшиц: Физматлит, 2002.

- [Лан04] Лившиц Ландау. Теоретическая физика. Том 1. Механика. Под ред. Физматлит. Физматлит, 2004.
- [МА20] Авдыев М.А. «Теорема Ферма с позиции физики в школе». В: Обучение и воспитание детей и подростков: от теории к практике коллективная монография. Под ред. А.Ю. Нагорнова. Ulyanovsk: Научное издательство Зебра, 2020. Гл. 3.11, с. 330—346.
- [Мал56] Анатолий Иванович Мальцев. Основы линейной алгебры. ГИТТЛ, 1956.
- [Мат70] Юрий Владимирович Матиясевич. «Диофантовость перечислимых множеств». В: 191.2 (1970), с. 279—282.
- [Мат93] Юрий В Матиясевич. «Десятая проблема Гильберта». В: М.: Физматлит (1993).
- [Мес78] Альберт Мессиа. Квантовая механика. Том 1. Наука, 1978.
- [МП22] Юрий Манин и А Панчишкин. Введение в современную теорию чисел. Litres, 2022.
- [МУ73] Дж Милнор и А Уоллес. Дифференциальная топология. Мир, 1973.
- [Мыш72] Мышкис. Высшая математика специальные курсы. Под ред. Физматлит. Физматлит, 1972.
- [НВ04] Ефимов Н.В. Высшая геометрия. Учебник. Физматлит, 2004.
- [Нов04] Федор Алексеевич Новиков. Дискретная математика для программистов. Питер, 2004.
- [Пен05] Роджер Пенроуз. Тени разума в поисках науки о сознании. Институт компьютер. исслед., 2005.
- [Пет99] Трифонов Евгений Дмитриевич Петрашень Мария Ивановна. Применение теории групп в квантовой механике. Издательская группа УРСС, 1999.
- [Пон86] Лев Семенович Понтрягин. Обобщения чисел. Наука, 1986.
- [Пос21] АВ Постолит. «Основы искусственного интеллекта в примерах на Python». В: Самоучитель. СПб.: БХВ-Петербург (2021).
- [Пра] К. П. Прахар. Распределение простых чисел. Под ред. Мир. с нем. А. А. Карацубы.
- [ПС86] Илья Пригожин и Изабелла Стенгерс. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. Т. 432. 1986, с. 3.
- [Пто+98] Клавдий Птолемей и др. Альмагест: или математическое сочинение в тринадцати книгах. Наука, 1998.
- [Риб03] П Рибенбойм. Последняя теорема Ферма для любителей. М.: Мир, 2003.
- [Рим48] Риман. Риман Бернгард. Сочинения. Перевод с нем. под ред. В.Л.Гончарова. ОГИЗ Гос. издательство технич. теоретич. литературы, 1948.
- [Роx15] Антонио Рохо. Возможно да, возможно нет. Фишер. Статистический вывод. Наука. Величайшие теории.—М.: Де Агостини, 2015.

- [С Г05] С В Задулина С Г Григорьев. Математика для студентов учреждений среднего проф. образования. Образовательный центр Академия, 2005.
- [Сад04] Виктор Антонович Садовничий. Теория операторов. 2004.
- [Сел03] Федор Андреевич Селиванов. Поиск ошибочного и правильного. Изд-во Тюмен. гос. у-та, 2003.
- [Сер59] Вацлав Серпинский. Пифагоровы треугольники. 1959, с. 5—12.
- [Сиз07] Сергей Викторович Сизый. Лекции по теории чисел. 2007.
- [Син00] Саймон Сингх. Великая теорема Ферма. Т. 288. 2000.
- [Ску10] ДП Скулачёв. «Корреляция данных по анизотропии реликтового излучения в экспериментах WMAP и "Реликт-1"». В: Успехи физических наук 180.4 (2010), с. 389—392.
- [Тах11] ЛА Тахтаджян. Квантовая механика для математиков, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика, М.–Ижевск 2011, 496 с.; English transl., LA Takhtajan, Quantum mechanics for mathematicians. Т. 95. 2011.
- [Тит53] ЕК Титчмарш. Теория дзета-функции Римана. ИЛ, 1953.
- [Тич53] ЕК Тичмарш. «Дзета-функция Римана». В: (1953).
- [Тре01] Зейферт Трельфалль. Топология. Зейферт Г Трельфалль В. Под ред. Регулярная и хаотическая динамика. Ижевск НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
- [Фер00] Э Ферми. «Лекции по квантовой механике.» В: (2000).
- [Хар62] Александр Александрович Харкевич. Спектры и анализ. Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
- [Хин23] А.Я Хинчин. Три жемчужины теории чисел. Ленанд, 2023.
- [Хоа14] Наварро Хоакин. Неуловимые идеи и вечные теоремы. Великие задачи математики. 2014, с. 84—160.
- [Худ70] Дерек Худсон. Статистика для физиков. Мир, 1970.
- [Чан74] Комараволи Чандрасекхаран. Введение в аналитическую теорию чисел. Мир, 1974.
- [Шпе10] Освальд Шпенглер. закат Европы. 6. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего ..., 2010, с. 226—236.
- [Эвк48] Эвклид. Начала Евклида Книга II Перевод Д.Д.Мордухай-Болтовского. Под ред. И.Н.Веселовский М.Я.Выгодский. ГТТИ, 1948, с. 123—142.
- [Эдв80] Г Эдвардс. Последняя теорема Ферма. М.: Мир, 1980.
- [Ю12] Белова Л Ю. Элементы теории множеств и математической логики. 2012, с. 26—27.
- [ЯН12] Шинтан Яу и Стив Надис. Теория струн и скрытые измерения Вселенной. Питер, 2012.

Использованы следующие интеллектуальные ресурсы

Эта книга была подготовлена с помощью шаблона Federico Marotta (federicomarotta@mail.com) На основе докторской диссертации Ken Arroyo Ohori KOMA-Script и L^AT_EX с использованием kaobook class. в редакторе TeXstudio 4.8.3 Copyright (c) TeXstudio: Benito van der Zander, Jan Sundermeyer, Daniel Braun, Tim Hoffmann, Texmaker: Pascal Brachet, QCodeEdit: Luc Bruant html conversion: Joël Amblard Шаблон доступен по ссылке : <https://github.com/fmarotta/kaobook>

- ▶ Репродукция с картины Тайная Вечера Леонардо да Винчи, а также фото учёных: Ферма, Н. И. Лобачевский, П. Л. Чебышёв, А. М. Ляпунов, Дж. К. Максвелл, Л. Больцман, Георг Кантор, источник: агрегатор Яндекс Картинки в соответствии со ст. 1274 ГК РФ - Свободное использование произведения в информационных, научных, учебных или культурных целях.
- ▶ Сюжет о путешествии астронавта Фёдора из книги М.А. Авдеев Восхождение к вершине гиперкуба. Издательство Ridero 2020
- ▶ Рисунки, смоделированные в OpenSCAD - программа для создания твердотельных 3D-моделей САПР. Свободное программное обеспечение распространяется под лицензией GPL - General Public License Мариусом Кинтелом (Marius Kintel)
- ▶ Рисунки, смоделированные автором в GeoGebra L^AT_EX с GeoGebra Non-Commercial License Agreement GeoGebra is open source software and available free of charge for non-commercial users. General Public License.
- ▶ Фото титульной и заключительной страниц монографии сделаны автором в GIMP 2.10.38 GNU Image Manipulation Program Авторские права © 1995-2024 Spencer Kimball, Peter Mattis и команда разработчиков GIMP

И другие интеллектуальные права. С благодарностью от автора!

Монография подготовлена под редакцией М. Ю. Фоминой. Сайт Союз Сибирский Центр медиации
<https://emediator.ru>

Сделанные выводы могут быть обобщены на целый ряд подсистем и в равной мере относятся как к математике (основы теории вероятности, логики), так и физике. Возможность выделения подсистемы в составе сложной системы, без изменения её свойств, позволяет сделать мир управляемым и познаваемым, редуцировать сложные явления к простым. Простые числа — это метаязык нашей Вселенной.



Марат Авдыев

Союз "Сибирский Центр медиации"
2025